UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FRACÇÕES CONTÍNUAS NO ENSINO PRÉ-UNIVERSITÁRIO

João Carreira Paixão

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

2011

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FRACÇÕES CONTÍNUAS NO ENSINO PRÉ-UNIVERSITÁRIO

João Carreira Paixão

Dissertação orientada pelo Prof. Doutor Pedro J. Freitas

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

2011

Resumo

Esta dissertação foi concebida com o objectivo de obter o grau de Mestre em Matemática para Professores, pela Universidade de Lisboa.

As Fracções Contínuas possibilitam abordar conceitos que os alunos estudam ao longo do seu percurso escolar mas muitas vezes tendem a percepcionar como estanques e sem qualquer tipo de inter-relação.

É frequentemente apontado como obstáculo principal a extrema dificuldade que os alunos manifestam em estabelecer conexões e relacionar conceitos. Se por um lado é necessário promover a resolução de exercícios que assegurem o esclarecimento do assunto em estudo, também não é menos verdade que apresentar aos alunos diferentes perspectivas do mesmo conceito, permite despertar a sua consciência para propriedades que por vezes se esbatem quando a visão sobre um objecto não se altera.

A par de uma explicação teórica do tema, apresentam-se sugestões de tarefas possíveis de serem aplicadas em aulas da disciplina de Matemática do 3º Ciclo/Secundário sem prejudicar o tempo necessário à conclusão do programa da disciplina e que não exige conhecimentos para além do esperado que um aluno, ao terminar o 2º Ciclo do Ensino Básico, possua.

Palavras Chave: Fracção Contínua, Vantagem de uma aproximação, Fracção Reduzida, Sucessão de Reduzidas, Aplicação de Gauss, Sistema Discreto Caótico

Abstract

This Dissertation was written to obtain the Master Degree in Mathematics for Teachers by the University of Lisbon.

Continued fractions allow the understanding of concepts that students work along the different school levels but often tend to understand as completely sealed and without any kind of relationship.

It is often pointed out as major obstacle the extreme difficulty that students show in making connections and relating concepts. On the one hand we need to promote the resolution of exercises to ensure the clarification of the subject under study, but it is no less true that introducing students to different perspectives of the same concept, makes them aware to properties that sometimes fade when the vision on an object does not change.

Along with a theoretical explanation of the topic, some suggestions of possible tasks are presented to be implemented in the lessons of Mathematics from intermediate to secondary level without sacrificing the time needed to complete the program of the subject and does not require extra knowledge beyond what is expected a student to know, after finishing his elementary level of basic education.

Keywords: Continued Fractions, Best approximations, Convergents, Sequence of convergents, Gauss Map, Discrete Chaotic System

Agradecimentos

O presente trabalho não poderia ter sido concluído sem o inestimável auxílio e orientação do Pofessor Pedro J. Freitas, a quem agradeço toda a paciência e disponibilidade manifestada.

A todos os professores do Curso de Mestrado pela visão que imprimiram aos tópicos leccionados durante o percurso escolar.

À minha família: mulher, mãe e irmão, pelas palavras de conforto e encorajamento quando o tempo urgia e parecia não ser complacente com a actividade profissional, acrescento ainda as inúmeras sugestões que me foram transmitindo ao longo deste percurso.

Aos colegas da Escola Secundária com 3º Ciclo de Maria Lamas, pelos esclarecimentos e opiniões apresentados e pela atenção que manifestaram ao facilitar em diversos momentos a compatibilização do trabalho com a escola.

Aos meus amigos pela compreensão e apoio que manifestaram ao longo destes últimos dois anos.

À memória do meu pai.

Índice

Introdução

As fracções contínuas são objecto de estudo apenas no ensino superior sobretudo em disciplinas relacionadas com a Teoria de Números contudo, a simplicidade de cálculo e métodos envolvidos, os resultados ao mesmo tempo potentes e acessíveis, tornam este tópico compreensível a qualquer aluno a partir do início do 3º Ciclo do Ensino Básico. Numa primeira fase seguimos superficialmente um método para o desenvolvimento de um número em fracção contínua e posteriormente, acompanhamos a sua progressão ao longo do percurso escolar, aprofundando resultados e compreendendo com outro rigor e perspectiva diferentes temas que fazem parte do currículo do ensino da Matemática em Portugal.

A relevância, neste contexto, assume-se quer pelo interesse histórico, quer pelas conexões que é possível estabelecer entre teorias aparentemente díspares, reforçando a ideia de unidade que parece ser cada vez mais forte e que pode e deve ser trabalhada em qualquer grau de ensino. Por outro lado, permite trabalhar a abstracção Matemática sem cair no exagero do conceito de Matemática "prática", que tem vindo a ser referenciada com maior ênfase nas últimas reformulações do respectivo programa nacional da disciplina. Sendo certo que muito do seu desenvolvimento surgiu de necessidades concretas, reais, não é menos verdade que inúmeros resultados foram obtidos e aplicados no campo mais restrito desta ciência. Estas duas perspectivas não se devem opor, antes complementam-se, como é possível perceber perante os avanços alcançados em diversos campos científicos no último século. É precisamente este aspecto que torna relevante o estudo de tópicos que ajudem a esclarecer de que forma evolui a Matemática e que relações existem entre os diferentes objectos que os alunos estudam ao longo do seu percurso escolar.

Porque razão se introduzem os irracionais por oposição aos racionais se todos podem ter uma mesma representação e a sua distinção se torna tão simples e imediata? Porque não explicar que até ao século XIX se aproximavam números por fracções? Porque não apresentar um método simples para encontrar soluções inteiras de equações do 1º grau a duas incógnitas com coeficientes racionais?

No ensino básico o conceito de valor aproximado é amiúde introduzido sem aprofundar a noção de erro que lhe está associado, costuma-se enquadrar numa perspectiva histórica vários exemplos de aproximações, a do número π por Arquimedes é uma das recorrentes. A explicação de que se tratam de boas aproximações, sem recurso à comparação com o valor obtido na calculadora, não faz parte do programa vigente.

Por outro lado, no ensino secundário, principalmente no 12º ano, os alunos revelam uma maturidade que já permite um primeiro esclarecimento quanto à noção de Sistemas

Dinâmicos e Comportamento Caótico, com base em ideias e exemplos simples como os aqui apresentados.

A abordagem às fracções contínuas e aos sistemas caóticos, que se enquadram no objecto de estudo mas não são contemplados no programa, requer um domínio exacto por parte do professor/educador para perceber quando e como os devem introduzir.

Neste sentido, o presente trabalho pretende expor os principais resultados da teoria clássica das fracções contínuas, sem esquecer uma pequena contextualização histórica, bem como apresenta a aplicação de Gauss que permite, a partir de resultados conjuntos, observar o comportamento desta à luz da teoria dos Sistemas Dinâmicos Caóticos e assim exemplificar o que se entende por Sistemas Sensíveis a Condições Iniciais.

Posteriormente são apresentadas seis possíveis tarefas, uma para cada ano de escolaridade do 3º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, que incidem num dos temas abordados no ano lectivo específico com excepção do 7º ano, uma vez que neste surge como uma necessidade de recordar aos alunos como trabalhar com fracções. Cada uma é precedida por uma síntese quanto à relevância do tema seleccionado para o respectivo ano lectivo enquadrando o seu desenvolvimento, tendo-se em atenção a utilização de uma linguagem apropriada ao público alvo não descurando o necessário rigor mas evitando exageros de formalismos.

Fracções Contínuas

Na literatura portuguesa usam-se duas expressões para designar o mesmo conceito: Fracção Continuada e Fracção Contínua. O primeiro segue a tradução do inglês *Continued Fraction*, o segundo parece resultar da palavra latina *Continuis* que surge, por exemplo, no título do trabalho de Leonard Euler de 1737, *De Fractionibus Continuis*[1].

De facto, o tempo verbal *continuis* tem correspondência com dois verbos em Latim, o verbo *Continuo* e o verbo *Contineo*. O primeiro exprime as ideias de: seguir imediatamente, assegurar uma continuidade, fazer suceder no tempo sem interrupções; já o segundo implica: manter unido, conter.

Ora, de acordo com o Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea da Academia das Ciências de Lisboa, a palavra *contínua* pode ser considerada sinónimo da palavra *continuada*. Na realidade, a origem latina de cada uma é diferente. Ambas as palavras obrigam a uma noção de ininterrupto o que, como se verá posteriormente, não é verdade quando estas fracções representam números racionais. Neste sentido, parece mais correcto reportarmo-nos ao verbo *Contineo*, do qual deriva a palavra *contínuo*, uma vez que tem como significado *conter* e é precisamente este o aspecto principal das fracções agora tratadas: o de conter em si uma outra fracção e assim sucessivamente de forma finita ou não. Usaremos pois o termo fracção contínua para nos referirmos a este tipo de fracções.

Uma fracção contínua é uma expressão da forma:

$$f = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

onde os a_i são designados por *quocientes parciais*, com $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \mathbb{N}, i \geq 1$

Se a expressão contém um número finito de termos diz-se que é uma *Fracção Contínua Finita*.

Se o número de termos for infinito diz-se que é uma *Fracção Contínua Infinita*.

[1] Um importante marco quer pelos resultados apresentados, quer pelos exemplos de desenvolvimento em fracção contínua apresentados, adiante serão referidos alguns.

Mais tarde verificar-se-á que qualquer que seja a fracção contínua considerada, esta representa sempre um número real.

Para maior facilidade de trabalho com estas expressões, opta-se por usar uma das seguintes formas:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\cdots \qquad \text{ou} \qquad [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

Ao longo do texto usar-se-á a sobretudo esta última, embora nas Tarefas propostas se utilize a apresentada na página anterior por ser mais intuitiva.

Breve nótula histórica

Há a tentação de relacionar as Fracções Contínuas com Euclides (300 A.C.) e Arquimedes (287 – 212 A.C), não por qualquer indício histórico mas por um e outro terem apresentado resultados que encaixam perfeitamente nesta Teoria como se verá um pouco mais à frente.

Quanto a factos concretos, há registo do matemático hindu Aryabhata (476 D.C.) ter usado um método semelhante para resolver equações Diofantinas (encontrar as soluções inteiras de equações com uma ou mais incógnitas), assim designadas em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria (250 A.C.), sem contudo apresentar um método geral. Terá sido o também matemático hindu Bahscara II que ao editar o livro "Lilavati" (em 1115) o primeiro a apresentar um método para resolver equações Diofantinas a partir do desenvolvimento em fracção contínua de um número, semelhante ao que será adiante exposto. Já em 1575, no livro *Álgebra*, Rafael Bombelli (1526 – 72) usa este tipo de fracção para aproximar raízes quadráticas (por exemplo $\sqrt{13}$), também Pietro Cataldi (1548-1626) apresenta um desenvolvimento para $\sqrt{18}$, contudo nenhum aprofundou a generalização em fracção contínua.

É em 1692 e depois de Lord Brouncker (1602 – 84) ter apresentado o desenvolvimento de $\frac{4}{\pi}$ na fracção contínua $\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{9}{2+}\frac{25}{2+}\frac{49}{2+\cdots}$, que surge pela primeira vez o termo Fracção Contínua, introduzido pelo matemático inglês John Wallis (1616 – 1703) no seu livro

Opera Mathematica I[2]. Neste período, 1685, o matemático e astrónomo holandês Christian Huygens (1629 – 95), apresenta uma aplicação das fracções contínuas no cálculo da razão entre rodas dentadas para a construção de um planetário mecânico.

Durante os séculos XVIII e XIX nomes como Euler, Lagrange, Lambert, Gauss, Galois, Cauchy, entre outros, desenvolveram a teoria alargando o campo de acção a outras áreas da Matemática.

Euler (1707 – 83) em 1737 no livro *De Fractionibus Continuis*, provou que qualquer irracionalidade quadrática (ou seja, raiz de um polinómio do segundo grau com coeficientes inteiros) é expressa por uma fracção contínua periódica, tendo criado um método para encontrar as fracções contínuas de raízes de uma equação do 2º grau com coeficientes inteiros [Olds, pág. 32]. Apresentou também a expressão para o número e em fracção contínua $e-1=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+\cdots}$. Johan Lambert (1728 – 77), usou o trabalho de Euler para provar que se x fosse um racional diferente de 0 então e^x e $\tan x$ não podiam ser racionais [Klein, pág. 460]. Joseph Lagrange (1736 – 1813) em 1770 demonstrou a recíproca do Teorema de Euler.

Durante o séc. XX as fracções contínuas foram aplicadas para deduzir algoritmos computacionais, destacam-se o trabalho de Daniel Shanks que em Abril de 1954 descreve um método para calcular logaritmos a partir do desenvolvimento em fracções contínuas, tirando partido da "rapidez" de cálculo dos computadores da altura [Olds, pág. 84] e de M. A. Morrison e J. Brillhart que em 1975, desenvolveram um algoritmo de factorização prima, baseado no desenvolvimento em fracções contínuas, o mais rápido até 1981, ano em que foi proposto o Método da Rede/Malha Quadrática por Carl Pomerance.

Também no estudo de sistemas dinâmicos caóticos se recorre a propriedades das fracções contínuas para analisar comportamentos e justificar resultados [Devaney, pág. 307].

Resultados fundamentais

O estudo das fracções contínuas desenvolveu-se rapidamente por vários factores mas um dos que mais contribuiu foi sem dúvida a compreensão por parte dos matemáticos de que estas possibilitavam a melhor aproximação possível, num certo sentido, de um

[2] Wallis e Brouncker foram co-fundadores da Royal Society.

número real por um número racional com denominador relativamente pequeno. Vejamos como:

Algoritmo: Escrever qualquer número real na forma de uma fracção contínua.

Apenas se mostrará, de momento, que é possível escrever qualquer real como uma fracção contínua, que qualquer fracção contínua representa um único número real requer um pouco mais de detalhe e compreensão dos conceitos que agora se introduzem. Pelo que será visto um pouco mais adiante.

Note-se, ainda, que a qualquer número real corresponde um ponto na recta real (sublinhe-se que a recíproca também é verdadeira pelo Princípio dos Segmentos Encaixados ou Axioma de Cantor).

Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (para $\mathbb{R}^-$ o raciocínio é completamente análogo)
então $\exists\ n \in \mathbb{N}_0$ tal que $n \leq \alpha \leq n+1$.

Suponhamos que $\alpha \neq n$ (se for, deixa de ter interesse, $\alpha = \frac{n}{1}$)
Desta forma $\alpha = n + u$, com $0 \leq u < 1$.

Mas, se $u < 1$ então $\frac{1}{u} > 1$ e podemos tomar $\frac{1}{u} = a_1 + u_1$ com $0 \leq u_1 < 1$

(o mesmo raciocínio que para α já que $\frac{1}{u}$ é real e maior que 0)

ou seja $\frac{1}{u} = a_1 + u_1$, mas por sua vez $\frac{1}{u_1} = a_2 + u_2$, $0 \leq u_2 < 1$ e assim sucessivamente.

Temos então que $$\alpha = a_a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$, com $a_0 = n$ e $u_0 = u$.

Assumindo a partir deste momento que qualquer número real pode ser representado da forma acima e aceitando o facto ainda não demonstrado de que esta correspondência é unívoca, outra questão se coloca: Haverá diferenças de representação entre os números reais? A resposta é afirmativa conforme foi demonstrado por Euler em 1737, no já citado *De Fractionibus Continuis*.

Teorema 2 (Euler): Um número real é racional sse tem como expressão uma fracção contínua finita.

Dem.

Uma implicação recorre ao algoritmo de Euclides para determinar o máximo divisor comum entre dois números inteiros.

Seja $\frac{p}{q}$ um número racional, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Pelo teorema anterior $\frac{p}{q}$ pode ser escrito na forma de fracção contínua.

O algoritmo de Euclides garante-nos que ela é finita, portanto dividindo p por q:

$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}$ (corresponde ao primeiro passo do algoritmo)

em que $0 \leq r_0 < q \Rightarrow 0 \leq \frac{r_0}{q} < 1$

assim, $\frac{q}{r_0} > 1$ e $\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}$ (segundo passo do algoritmo)

onde $0 \leq r_1 < r_0$ ($q = a_1 r_0 + r_1$, $r_1 < r_0$)

Continuando, $\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$ $(0 \leq r_2 < r_1)$ e assim sucessivamente.

Como, no fundo, estamos a aplicar o algoritmo de Euclides, este garante-nos a finitude do processo, já que os restos vão diminuindo, $r_0 \geq r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_k = 0$.

Desta forma, $\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$ é uma fracção contínua finita em que os a_i, $i \in \mathbb{N}$, são os quocientes das divisões dos passos do algoritmo de Euclides.

Reciprocamente, considere-se uma fracção contínua finita.

Usamos a notação $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ para maior comodidade.

A prova segue por indução:

Para $k=1$, $\left[a_0;a_1\right]=a_0+\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{a_0a_1+1}{a_1}$, que é racional pois $a_0\in\mathbb{Z}$ e $a_1\in\mathbb{N}$.

Suponha-se que se verifica para um certo $k\in\mathbb{N}$, $\left[a_0;a_1,a_2,...,a_k\right]$

Verifique-se para $k+1$:

$$\left[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_k,a_{k+1}\right]=a_0+\cfrac{1}{\left[a_1;a_2,a_3,...,a_k,a_{k+1}\right]}$$

$$=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\left[a_2;a_3,...,a_k,a_{k+1}\right]}}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\cfrac{p}{q}}}$$

(pela hipótese de indução uma fracção contínua com k elementos é um número racional)

logo $\left[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_k,a_{k+1}\right]=a_0+\cfrac{1}{\cfrac{p'}{q'}}=a_0+\dfrac{q'}{p'}\in\mathbb{Q}$

O que prova a afirmação.

Surge assim o seguinte corolário que não carece de demonstração (na recta real todos os pontos correspondem a números racionais ou irracionais).

Corolário: Qualquer número irracional se escreve como uma fracção contínua infinita.

Vejam-se agora dois exemplos simples de como escrever um número racional e outro irracional na forma de fracção contínua:

1º. Encontre-se a fracção contínua para $\dfrac{108}{35}$:

$$108=35\times3+3\Rightarrow\frac{108}{35}=3+\frac{3}{35}=3+\cfrac{1}{\cfrac{35}{3}}$$

$$35=3\times11+2\Rightarrow\frac{35}{3}=11+\frac{2}{3}=11+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}$$

$$3=2\times1+1\Rightarrow\frac{3}{2}=1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{1}}$$

$$2 = 1\times 2+0 \Rightarrow \frac{2}{1} = 2+0$$

assim, tem-se que $\dfrac{108}{35} = 3+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$

ou escrito de outra forma $\dfrac{108}{35} = [3;11,1,2]$.

2º. Encontre-se a fracção contínua para $\sqrt{3}$.

$$\sqrt{3} = 1+\alpha,\ 0\le \alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = x_1 > 1$$

$$\sqrt{3} = 1+\frac{1}{x_1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1+\frac{1}{x_1}+1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1+\frac{1}{2x_1} \Leftrightarrow x_1 = 1+\frac{1}{x_2}\ \ (x_2 = 2x_1)$$

por sua vez,

$$x_2 = \frac{1}{x_1-1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{3}+1$$

como, $\sqrt{3}+1 = 2+\dfrac{1}{x_1}$, vem que $x_2 = 2+\dfrac{1}{x_1}$, ou seja volta a aparecer x_1.

$$\sqrt{3} = 1+\frac{1}{x_1} \Rightarrow \sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x_2}} \Rightarrow \sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x_1}}}$$

Conclui-se que $\sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$, uma fracção contínua infinita.

A demonstração de parte do teorema 1 fornece ela própria um algoritmo para encontrar a fracção contínua de uma dado número real, em particular irracional, requer no entanto que se conheça a sua representação decimal.

O exemplo anterior serve de pretexto para a apresentação do próximo resultado:

Teorema 3 (Euler-Lagrange)
Uma fracção contínua é periódica sse representa um irracional quadrático (i.e. uma raiz de um polinómio do segundo grau com coeficientes racionais).

Demonstram-se as duas implicações em separado para maior comodidade e por terem autores distintos.

Dem. (Euler)
Uma fracção contínua periódica representa um irracional quadrático.

Seja $x=\left[a_0;a_1,a_2,a_3,...\right]$ uma fracção contínua, então

$\exists\ k\in\mathbb{N}: x=\left[a_0;a_1,a_2,...,a_{k-1},\overline{a_k,a_{k+1},...,a_{k+m-1}}\right]$, ou seja a partir do termo de ordem *k* os quocientes parciais repetem-se de *m* em *m* termos, *m* é o período da fracção contínua.

Pode-se escrever $\qquad x=\dfrac{p_{k-1}\alpha_k+p_{k-2}}{q_{k-1}\alpha_k+q_{k-2}} \qquad$ (A)

$\alpha_k=\left[a_k,a_{k+1},a_{k+2},...\right]$, designa-se por quociente completo, interessa apenas a fracção com os quocientes parciais a partir do termo de ordem *k*.

A igualdade (A) verifica-se porque $\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=\dfrac{p_{k-2}a_{k-1}+p_{k-3}}{q_{k-2}a_{k-1}+q_{k-3}}$ e escrevendo $a_{k-1}+\dfrac{1}{\alpha_k}$ em vez de a_{k-1} obtém-se x a partir de $\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$: $\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_{k-1}}}}$ e

assim, $a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_{k-1}+\cfrac{1}{\alpha_k}}}}=x$.

Desta forma,

$$x=\frac{p_{k-2}\left(a_k+\dfrac{1}{\alpha_k}\right)+p_{k-3}}{q_{k-2}\left(a_k+\dfrac{1}{\alpha_k}\right)+q_{k-3}}=\frac{p_{k-2}a_k+\dfrac{p_{k-2}}{\alpha_k}+p_{k-3}}{q_{k-2}a_k+\dfrac{q_{k-2}}{\alpha_k}+q_{k-3}}=\frac{p_{k-1}+\dfrac{p_{k-2}}{\alpha_k}}{q_{k-1}+\dfrac{q_{k-2}}{\alpha_k}}=\frac{p_{k-1}\alpha_k+p_{k-2}}{q_{k-1}\alpha_k+q_{k-2}}$$

$\alpha_k=\alpha_{k+m}$, pois α_k é uma fracção contínua periódica desde o primeiro termo

logo $\alpha_k=\dfrac{p_{k+m-1}\alpha_{k+m}+p_{k+m-2}}{q_{k+m-1}\alpha_{k+m}+q_{k+m-2}}$, e assim $\alpha_k=\dfrac{p_{k+m-1}\alpha_k+p_{k+m-2}}{q_{k+m-1}\alpha_k+q_{k+m-2}}$

concluindo-se que $q_{k+m-1}\alpha_k^2+\left(q_{k+m-2}-p_{k+m-1}\right)\alpha_k-p_{k+m-2}=0$ e como $p\alpha_k+q\neq 0$, porque senão ter-se-ia $\alpha_k=\dfrac{-q}{p}$, ou seja um racional o que vai contra a o facto de α_k ser uma fracção contínua infinita e logo, um irracional.

Temos assim que α_k é um irracional quadrático.

Por outro lado da igualdade (A) sai que $\dfrac{q_{k-2}x-p_{k-2}}{p_{k-1}-q_{k-1}x}=\alpha_k$

substituindo na equação do segundo grau anterior, vem:

$$q_{k+m-1}\left(\frac{q_{k-2}x-p_{k-2}}{p_{k-1}-q_{k-1}x}\right)^2+\left(q_{k+m-2}-p_{k+m-1}\right)\frac{q_{k-2}x-p_{k-2}}{p_{k-1}-q_{k-1}x}-p_{k+m-2}=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$q_{k+m-1}\left(q_{k-2}x-p_{k-2}\right)^2+\left(q_{k+m-2}-p_{k+m-1}\right)\left(q_{k-2}x-p_{k-2}\right)\left(p_{k-1}-q_{k-1}x\right)-p_{k+m-2}\left(p_{k-1}-q_{k-1}x\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$q_{k+m-1}\left(q_{k-2}x-p_{k-2}\right)^2+\left(q_{k+m-2}-p_{k+m-1}\right)\left(q_{k-2}x-p_{k-2}\right)\left(p_{k-1}-q_{k-1}x\right)-p_{k+m-2}\left(p_{k-1}-q_{k-1}x\right)^2=0$$

considerando

$$\begin{cases} A=q_{k+m-1}q_{k-2}^2-q_{k-2}q_{k-1}q_{k+m-1}+p_{k+m-1}q_{k-2}q_{k-1}-p_{k+m-2}q_{k-1} \\ B=-2p_{k-2}q_{k-2}q_{k+m-1}+q_{k+m-2}\left(q_{k-2}p_{k-1}+p_{k-2}q_{k-1}\right)-p_{k+m-1}\left(p_{k-2}p_{k-1}+p_{k-2}q_{k-1}\right)+2p_{k+m-2}p_{k-1}q_{k-1} \\ C=p_{k-2}^2q_{k+m-1}-q_{k+m-2}p_{k-2}p_{k-1}+p_{k+m-1}p_{k-2}p_{k-1}-p_{k+m-2}p_{k-1}^2 \end{cases}$$

vem que x verifica a equação $Ax^2+Bx+C=0$ e por ser irracional não pode ser solução de uma equação do 1º grau com coeficientes inteiros.

Logo x é um irracional quadrático.

Dem. (Lagrange, versão do matemático francês Charves de 1873)

Seja x um irracional quadrático, então tem como representação uma fracção contínua infinita periódica.

x é solução de uma equação do tipo $Ax^2 + Bx + C = 0$, com A, B e C inteiros.

Por outro lado, sendo irracional $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$, fracção contínua infinita.

Considere-se $\alpha_k = [a_k, a_{k+1}, a_{k+2} ...]$, o quociente completo de ordem *k*.

Tem-se que $x = [a_0; a_1, a_2, ..., \alpha_k]$, logo $x = \dfrac{p_{k-1}\alpha_k + p_{k-2}}{q_{k-1}\alpha_k + q_{k-2}}$

substituindo na equação: $A\left(\dfrac{p_{k-1}\alpha_k + p_{k-2}}{q_{k-1}\alpha_k + q_{k-2}}\right)^2 + B\dfrac{p_{k-1}\alpha_k + p_{k-2}}{q_{k-1}\alpha_k + q_{k-2}} + C = 0$

$$A(p_{k-1}\alpha_k + p_{k-2})^2 + B(p_{k-1}\alpha_k + p_{k-2})(q_{k-1}\alpha_k + q_{k-2}) + C(q_{k-1}\alpha_k + q_{k-2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Ap_{k-1}^2\alpha_k^2 + 2Ap_{k-1}\alpha_k p_{k-2} + p_{k-2}^2 + Bp_{k-1}q_{k-1}\alpha_k^2 + B\alpha_k(p_{k-2}q_{k-1} + q_{k-2}p_{k-1}) +$$
$$+Bp_{k-2}q_{k-2} + Cq_{k-1}^2\alpha_k^2 + 2C\alpha_k q_{k-1}q_{k-2} + Cq_{k-2}^2 = 0$$

ou seja, com $\begin{cases} A_k = Ap_{k-1}^2 + Bp_{k-1}q_{k-1} + Cq_{k-1}^2 \\ B_k = 2Ap_{k-1}p_{k-2} + B(p_{k-2}q_{k-1} + p_{k-1}q_{k-2}) + 2Cq_{k-1}q_{k-2} \\ C_k = Ap_{k-2}^2 + Bp_{k-2}q_{k-2} + Cq_{k-2}^2 \end{cases}$

tem-se que α_k verifica a equação $A_k\alpha_k^2 + B_k\alpha_k + C_k = 0$.

Para cada k conclui-se que α_k é um irracional quadrático. Poder-se-ia supor que para cada α_k ter-se-ia uma equação diferente, na realidade isto não acontece, ou seja, para diferentes α_k ir-se-á ter as mesmas equações, o que significa que os α_k se vão repetir, chega-se assim à conclusão que a fracção contínua original terá de ser necessariamente periódica.

Para se verificar que os coeficientes da equação aparecem apenas um número finito de vezes independentemente da ordem de α_k.

Comece-se por investigar A_k. Antes demais atente-se no facto que $\left|\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - x\right| < \frac{1}{q_{k-1}^2}$, já se viu atrás que é esta propriedade das fracções contínuas que permite falar em *melhor aproximação*.

Pode-se escrever $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - x = \frac{\delta}{q_{k-1}^2}$, com $|\delta| < 1$, desta forma tem-se que $p_{k-1} = \frac{\delta}{q_{k-1}} + xq_{k-1}$

Substituindo p_{k-1} na expressão relativa a A_k, obtém-se

$$A_k = A\left(xq_{k-1} + \frac{\delta}{q_{k-1}}\right)^2 + B\left(xq_{k-1} + \frac{\delta}{q_{k-1}}\right)q_{k-1} + cq_{k-1}^2 =$$
$$= A\left(x^2 q_{k-1}^2 + 2x\delta + \frac{\delta^2}{q_{k-1}^2}\right) + Bxq_{k-1} + B\delta + cq_{k-1}^2 =$$
$$= Ax^2 q_{k-1}^2 + 2Ax\delta + A\frac{\delta^2}{q_{k-1}^2} + Bxq_{k-1}^2 + B\delta + cq_{k-1}^2 =$$
$$= q_{k-1}^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) + \delta\left(2Ax + B + A\frac{\delta}{q_{k-1}^2}\right) =$$

$$= \delta\left(2Ax + B + A\frac{\delta}{q_{k-1}^2}\right),$$

porque x verifica a equação quadrática por hipótese.

Sabe-se que $\delta < 1$, então

$$A_k = \delta\left(2Ax + B + A\frac{\delta}{q_{k-1}^2}\right) < 2Ax + B + A\frac{\delta}{q_{k-1}^2} < 2Ax + B + \frac{A}{q_{k-1}^2} < 2Ax + B + A, \text{ pois } q_{k-1} > 1$$

ou seja, $|A_k| < |2Ax| + |B| + |C|$, A_k é limitado e não depende da ordem k. Como A_k é um inteiro, limitado, apenas pode tomar um número finito de valores.

A mesma conclusão se pode retirar para C_k uma vez que a sua expressão se pode obter da de A_k substituindo k por $k-1$.

Finalmente para B_k.

Do binómio discriminante da equação, vem que

$$B_k^2 - 4A_kC_k = \left(2Ap_{k-1}p_{k-2} + B\left(p_{k-2}q_{k-1} + p_{k-1}q_{k-2}\right) + 2Cq_{k-1}q_{k-2}\right)^2 - \\ +4\left(Ap_{k-1}^2 + Bp_{k-1}q_{k-1} + Cq_{k-1}^2\right)\left(Ap_{k-2}^2 + Bp_{k-2}q_{k-2} + Cq_{k-2}^2\right)$$

Ou seja,

$$B_k^2 - 4A_kC_k = B^2\left(p_{k-2}^2q_{k-1}^2 - 2p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + p_{k-1}^2q_{k-2}^2\right) + \\ +AC\left(8p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} - 4p_{k-1}^2q_{k-2}^2 - 4p_{k-2}^2q_{k-1}^2\right)$$

tem-se assim que,

$$B_k^2 - 4A_kC_k = B^2\left(p_{k-2}q_{k-1} - p_{k-1}q_{k-2}\right)^2 - 4AC\left(p_{k-2}q_{k-1} - p_{k-1}q_{k-2}\right)^2 = \\ = \left(B^2 - 4AC\right)\left(p_{k-2}q_{k-1} - p_{k-1}q_{k-2}\right)^2$$

logo, $B_k^2 - 4A_kC_k = B^2 - 4AC$, pois $p_{k-2}q_{k-1} - p_{k-1}q_{k-2} = (-1)^{k-2}$

e seguindo o mesmo raciocínio: $B_k^2 = B^2 - 4\left(AC - A_kC_k\right)$, AC é fixo para cada x e A_k, C_k só tomam um número finito de valores, o que obriga a que B_k possa apenas tomar um número finito de valores.

Concluí-se assim que, independentemente do α_k, o número possível de equações quadráticas que se pode obter com estes coeficientes é finito, logo as equações têm de se repetir e, deste modo, os α_k também se repetirão o que implica que a fracção contínua será periódica a partir de certa ordem.

Noção de vantagem de uma aproximação

Analise-se agora a questão da aproximação e, em paralelo, esclareça-se porque qualquer fracção contínua representa um único número real.

Como encontrar uma aproximação de um número real por uma fracção? Dispomos de diferentes métodos para aproximar um determinado número real por outro racional mais fácil de trabalhar, de entre estes as fracções foram usadas desde tempos longínquos, Arquimedes no século III A.C. aproximou π por $\frac{22}{7}$ o que constitui motivo de admiração pois só muitos séculos mais tarde se conseguiu perceber a real dimensão do valor de π.

Pode-se explicar esta aproximação à luz da teoria das fracções contínuas.

Uma aproximação de um número real por uma fracção (com denominador pequeno) diz-se vantajosa, se não for possível diminuir o erro sem aumentar o denominador da fracção. Em particular, se o erro absoluto for consideravelmente menor que aquele que seria de esperar utilizando esse denominador – o valor usado por Arquimedes é uma aproximação vantajosa.
Para explicar este facto introduz-se a noção de Fracção Reduzida ou Convergente como prefere a literatura em língua inglesa.
Uma fracção contínua diz-se reduzida se for obtida de uma fracção contínua por truncatura num determinado quociente parcial.

Seja uma fracção contínua $\left[a_0;a_1,\ldots,a_n\right]$, uma sua reduzida será $\left[a_0;a_1,\ldots,a_k\right]$, com $k \leq n$.

Estas fracções sendo finitas representam números racionais, escrevem-se assim como números fraccionários.
Veja-se como encontrar uma fracção reduzida:

$$\frac{p_k}{q_k}\text{, onde } \begin{array}{l} p_k = p_{k-1}a_k + p_{k-2} \\ q_k = q_{k-1}a_k + q_{k-2} \end{array} \quad , k \geq 2,$$

ou seja a reduzida de índice k obtém-se por recorrência a partir da segunda ordem.

Prova-se facilmente esta relação por indução tendo em atenção que, pela definição de fracção reduzida (é uma truncação da contínua) se tem:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}$$

Verifique-se para $k=0,\ k=1,\ k=2$

$$k=0 \Rightarrow \frac{p_0}{q_0}=\frac{a_0}{1}$$

$$k=1 \Rightarrow \frac{p_1}{q_1}=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}$$

$$k=2 \Rightarrow \frac{p_2}{q_2}=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}=a_0+\frac{a_2}{a_1a_2+1}=\frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_2}{q_2}=\frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1}=\frac{p_1a_2+p_0}{q_1a_2+q_0}$$

Suponha-se que se verifica para um certo $k \in \mathbb{N}$: $\frac{p_k}{q_k}=\frac{p_{k-1}a_k+p_{k-2}}{q_{k-1}a_k+q_{k-2}}$.

Verifique-se para $k+1$, notando que a convergente de índice k obtém-se substituindo na de índice k o quociente parcial a_k por $a_k+\frac{1}{a_{k+1}}$.

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{p_{k-1}\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)+p_{k-2}}{q_{k-1}\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)+q_{k-2}}=\frac{p_{k-1}a_k+p_{k-2}+\frac{p_{k-1}}{a_{k+1}}}{q_{k-1}a_k+q_{k-2}+\frac{q_{k-1}}{a_{k+1}}}=\frac{p_ka_{k+1}+p_{k-1}}{q_ka_{k+1}+q_{k-1}},\quad \left(a_{k+1}\neq 0\right)$$

Pode-se assim formar um quadro genérico que facilita o cálculo:

a_0	a_1	a_2	a_3	...
p_0	p_1	$p_1a_2+p_0$	$p_2a_3+p_1$	
q_0	q_1	$q_1a_2+q_0$	$q_2a_3+q_1$	

Regra geral: *multiplicar o quociente parcial do mesmo índice pela coluna anterior e somar à precedente desta última*.

Por exemplo, as reduzidas de $\frac{108}{35}$,

3	11	1	2
3	34	37	108
1	11	12	35

são: $3;\ \frac{34}{11};\ \frac{37}{12};\ \frac{108}{35}$.

Algumas reduzidas de $\sqrt{3}$:

1	1	2	1	2	1	…
1	3	7	10	27	37	…
1	2	5	7	19	26	…

são: $1;\ \frac{3}{2};\ \frac{7}{5};\ \frac{10}{7};\ \frac{27}{19};\ \dots$

Atente-se às respectivas representações[3] destas sucessões, figura1 para $\frac{108}{35}$ e figura2 para $\sqrt{3}$:

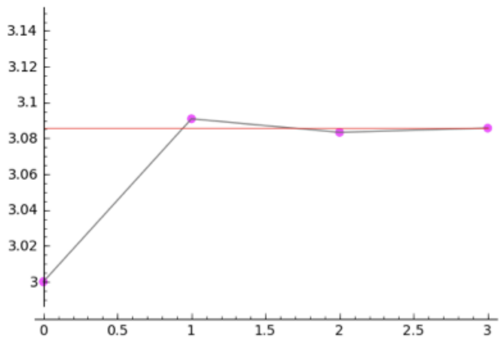


Figura 1

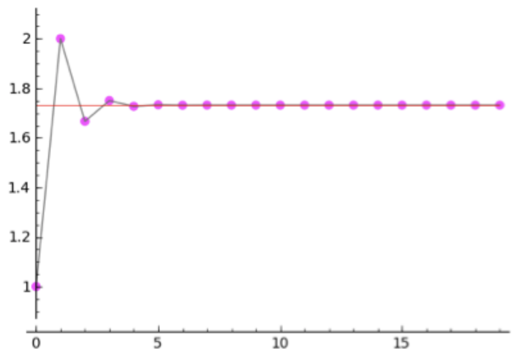


Figura 2

As fracções reduzidas apresentam propriedades muito interessantes e que permitem concluir sobre a vantagem de uma aproximação. Aliás, na literatura inglesa denominam-se muito apropriadamente por fracções convergentes, vejamos de que forma.

3 Estas representações foram construídas recorrendo ao software SAGE.

Para verificar a primeira propriedade: que qualquer fracção contínua representa um número real; comecemos por comparar duas fracções reduzidas consecutivas:

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}-\frac{p_k}{q_k}=\frac{p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}}{q_{k+1}q_k}=\frac{p_ka_{k+1}q_k+p_{k-1}q_k-p_kq_ka_{k+1}-p_kq_{k-1}}{q_{k+1}q_k}$$

$$=\frac{-\left(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k\right)}{q_{k+1}q_k}=\cdots=\frac{(-1)^k\left(p_1q_0-p_0q_1\right)}{q_{k+1}q_k}=\frac{(-1)^k\left(a_0a_1+1-a_0a_1\right)}{q_{k+1}q_k}=\frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k}\quad(1)$$

Compare-se agora, duas fracções convergentes consecutivas com a mesma paridade:

$$\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}-\frac{p_k}{q_k}=\frac{p_{k+2}q_k-p_kq_{k+2}}{q_{k+2}q_k}=\frac{p_{k+1}a_{k+2}q_k+p_kq_k-p_kq_{k+1}a_{k+2}-p_kq_k}{q_{k+2}q_k}$$

$=\dfrac{a_{k+2}\left(p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}\right)}{q_{k+2}q_k}=\dfrac{a_{k+2}(-1)^k}{q_{k+2}q_k}$, esta última igualdade resulta de (1).

Denotando $C_k=\dfrac{p_k}{q_k}$ concluí-se que

$$C_1-C_0>0,\ C_2-C_1<0 \text{ e } C_2-C_0>0 \text{, ou seja, } C_0<C_2<C_1.$$

Generalizando, vem que

$$C_0<C_2<C_4<\cdots<C_{2k}<\cdots<C_{2k+1}<\cdots<C_5<C_3<C_1.$$

Verifica-se que as fracções reduzidas de ordem par formam um sucessão crescente e as de ordem ímpar formam uma sucessão decrescente, mais, da igualdade (1) vem que $\lim\left|\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}-\dfrac{p_k}{q_k}\right|=\lim\left|\dfrac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k}\right|=0$ pois $q_{k+1}>q_k>\cdots>q_0$ o que implica que as duas subsucessões convergem, são monótonas e limitadas, para o mesmo número. Que limite será este?

No caso destas fracções se definirem com base numa fracção contínua finita, é fácil de ver que o último termo da sucessão geral é precisamente esta fracção e portanto é o limite. No caso da fracção original ser infinita, isto é, representa um irracional α. Observe-se que:

$$C_k=\left[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},a_k\right]$$
$$\alpha=\left[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},\alpha_k\right],\ \alpha_k\in\mathbb{R}^+ \text{, têm em comum } \left[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1}\right]$$
$$C_{k+1}=\left[a_0;a_1,\cdots,a_{k-1},a_k,a_{k+1}\right]$$

bastando comparar os termos nos quais diferem, $\dfrac{1}{a_k}$, $\dfrac{1}{\alpha_k}$ e $a_k+\dfrac{1}{a_{k+1}}$ respectivamente.

Ora, por construção, $\alpha_k = a_k + \dfrac{1}{\alpha_{k+1}}$, com $\alpha_{k+1} \in \mathbb{R}^+$, donde $\alpha_k < a_k$. Mas por outro lado também $\alpha_{k+1} = a_{k+1} + \dfrac{1}{\alpha_{k+2}}$, com $\alpha_{k+2} \in \mathbb{R}^+$ e assim, $\dfrac{1}{\alpha_{k+1}} > \dfrac{1}{a_{k+1}}$, pelo que $\alpha_k > a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$.

Obtém-se o enquadramento $a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}} < \alpha_k < a_k$, que aplicando nos termos referidos anteriormente resulta, $\dfrac{1}{a_k} < \dfrac{1}{\alpha_k} < \dfrac{1}{a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}}$.

Desta forma concluí-se que, $C_k < \alpha < C_{k+1}$ ou $C_{k+1} < \alpha < C_k$, um simples cálculo mostra que $C_0 < \alpha < C_1$, pois $C_0 = a_0 < \alpha$, ao mesmo tempo $C_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1} > a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1} = \alpha$, com $\alpha_1 \in \mathbb{R}^+$.

De forma análoga verifica-se que o irracional α está entre C_k e C_{k+1}, para todo $k \in \mathbb{N}_0$.
Como as fracções reduzidas de ordem par representam sempre um número inferior ao representado pelas de ordem ímpar, concluí-se que $C_{2k} < \alpha < C_{2k+1}$, generalizando $C_0 < C_2 < C_4 < \cdots < C_{2k} < \cdots < \alpha < \cdots < C_{2k+1} < \cdots < C_5 < C_3 < C_1$, explicando-se por este facto as representações gráficas atrás apresentadas.

Compreende-se que as fracções reduzidas também de designem de convergentes, estas formam uma sucessão alternada que converge para o número real que origina a fracção contínua inicial, as de ordem par aproximam por defeito, as de ordem ímpar por excesso.

A segunda propriedade é que estas fracções são irredutíveis ou seja, a sucessão é gerada de forma única, uma vez que os seus termos não se podem simplificar.
Suponhamos que não o eram, então $\exists \lambda \in \mathbb{Z} : \dfrac{p_k}{q_k} = \dfrac{\lambda p_k'}{\lambda q_k'}$, com $\lambda \neq 1$,

e como $p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^k$, teríamos $\lambda\left(p_{k+1}q_k' - p_k q_{k+1}'\right) = (-1)^k$ o que implicaria que $\lambda \mid (-1)^k$, o que é um absurdo.

Tomando uma qualquer fracção para aproximar um número real α temos
um erro absoluto $\leq \dfrac{1}{2q}$.

Repare-se que se $\frac{p-1}{q} < \alpha < \frac{p}{q}$ então, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$ ou $\left|\alpha - \frac{p-1}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$

Mas, considerando duas convergentes adjacentes

$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_k}{q_k} < \alpha < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} < \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$, tem-se

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_{k+1}q_k} \leq \frac{1}{q_k^2}$$

Ou seja, diminui-se significativamente o erro cometido que será bastante menor que o esperado. Esta é a razão porque se referem as fracções contínuas como vantajosas para a aproximação de um número real por um racional, permitem uma exactidão muito satisfatória com um denominador relativamente pequeno.

Aproximação de π, Arquimedes

A fracção usada por Arquimedes dá a melhor aproximação de todas as fracções de denominador não superior a 7.

O erro absoluto cometido com qualquer fracção seria inferior a $\frac{1}{2q}$, em particular, por outra fracção de denominador 7, $\Delta < \frac{1}{14}$.

Contudo, esta fracção, por ser uma das fracções convergentes do número π, dá um erro absoluto inferior a $\frac{1}{49}$. De facto $\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \simeq 0{,}0013 < \frac{1}{49}$.

Em conclusão, pode haver, e de certeza que há, fracções com uma melhor aproximação mas têm de utilizar um denominador maior e consequentemente mais difíceis de usar, repare-se que para a aproximação considerada, apenas com um denominador igual a 25 se poderia garantir um erro menor, $\frac{1}{2\times 25}=\frac{1}{50}<\frac{1}{49}$, isto é esclarecedor quanto ao assunto em questão.

Resolução de equações diofantinas

Da relação fundamental das fracções contínuas pode-se definir um algoritmo para determinar soluções inteiras, quando possível, de uma equação do tipo $ax+by=c, \text{com } a,b,c\in\mathbb{Z}$, o método de Bahscara II teria semelhanças com este.

Se $mdc(a,b)=k$ e $k\mid c$ a equação anterior tem solução em $\mathbb{Z}$, em particular, se $k\neq 1$ podem-se dividir todos os termos por k e neste caso $mdc(a,b)=1$. Ou seja, $\frac{a}{b}$ será a última fracção reduzida da fracção contínua correspondente a $\frac{a}{b}$.

Neste caso pode-se recorrer à igualdade já conhecida das fracções contínuas:

$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$

Vejamos as diversas possibilidades que se podem encontrar no caso $a>b, \text{com } a,b>0$:

1º. $ax-by=1$ e $k-1$ par .

Nesta situação a igualdade verifica-se para $\begin{cases} x=q_{k-1} \\ y=p_{k-1} \end{cases}$ pois, substituindo na equação vem

$aq_{k-1}-bp_{k-1}=p_k q_{k-1}-q_k p_{k-1}=1$.

Mas assim, $aq_{k-1}-bp_{k-1}=a\left(q_{k-1}+bt\right)-b\left(p_{k-1}+at\right)=1,\ \forall t\in\mathbb{Z}$

Logo, uma solução geral da equação será $\begin{cases} x=q_{k-1}+bt \\ y=p_{k-1}+at \end{cases}$, $t\in\mathbb{Z}$

2º. $ax-by=1$ e $k-1$ ímpar.

A igualdade verifica-se para $\begin{cases} x = -q_{k-1} \\ y = -p_{k-1} \end{cases}$ pois, substituindo na equação vem

$a(-q_{k-1}) - b(-p_{k-1}) = -aq_{k-1} + bp_{k-1} = -(aq_{k-1} - bp_{k-1}) = 1$

A solução geral da equação será $\begin{cases} x = bt - q_{k-1} \\ y = at - p_{k-1} \end{cases}$, $t \in \mathbb{Z}$

Para $a < b$ as situações invertem-se sendo que o processo é exactamente o mesmo.

No seguinte, não é necessário considerar os dois casos uma vez que sendo a adição comutativa em $\mathbb{Z}$, basta comutar as parcelas e redefinir a e b, $a,b > 0$.

3º. $ax + by = 1$ e $k-1$ par .

Sabe-se que $aq_{k-q} - bp_{k-1} = 1$, então a igualdade verifica-se para $\begin{cases} x = q_{k-1} \\ y = -p_{k-1} \end{cases}$

Substituindo na equação vem: $aq_{k-q} + b(-p_{k-1}) = aq_{k-1} - bp_{k-1} = 1$

A solução geral será $\begin{cases} x = q_{k-1} - bt \\ y = at - p_{k-1} \end{cases}$, $t \in \mathbb{Z}$

4º. $ax + by = 1$ e $k-1$ ímpar .

A igualdade verifica-se para $\begin{cases} x = -q_{k-1} \\ y = p_{k-1} \end{cases}$, pois substituindo na equação vem:

$a(-q_{k-q}) + bp_{k-1} = -(aq_{k-1} - bp_{k-1}) = 1$

A solução geral será $\begin{cases} x = bt - q_{k-1} \\ y = p_{k-1} - at \end{cases}$, $t \in \mathbb{Z}$

Para as equações onde no segundo membro figure -1, todo o tratamento é análogo apenas tendo em atenção a respectiva alteração dos sinais nas soluções particulares.

Generalizando, para uma equação do tipo $Ax + By = C$, com $A,B,C \in \mathbb{Z}$

Procede-se do seguinte modo:

1º Verificar se o $mdc(A,B) = k,\ k \in \mathbb{N}$ divide C

Se sim continuar para o ponto 2.

Caso contrário, não há soluções inteiras da equação, uma vez que se houvessem, k dividiria a sua soma, pois divide A e B e necessariamente, por ser igual, dividiria C.

2º Reduzir os termos da equação pelo factor k.

Obtém-se a equação $ax + by = c, \text{ com } a,b,c \in \mathbb{Z}$

3º Escrever a equação, considerando $c = \pm 1$, como uma das formas atrás apresentadas

4º Resolver a equação segundo as regras explicadas

5º Multiplicar por c as soluções encontradas.

Aplicação de Gauss e Sistemas Dinâmicos Caóticos

Como se referiu anteriormente, o método clássico para encontrar a fracção contínua de um número real segue um algoritmo bastante simples e intuitivo:

Considere-se o número real α, e tome-se para a_0 a sua parte inteira.

Obtém-se desta forma um número $\alpha_0 < 1$, caso α não seja ele próprio um inteiro. Segue que $\frac{1}{\alpha_0} > 1$ e assim podemos considerar novamente a sua parte inteira a_1 e a parte decimal α_1, repetindo o processo obtemos $\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$ ou escrito de forma compacta $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

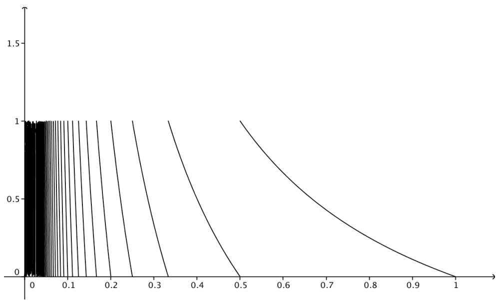
Este processo é finito apenas se α for um número racional.

A Aplicação de Gauss dirige a sua atenção não para os inteiros gerados por este algoritmo, mas para a outra parte, os $\alpha_i \in [0,1[, \ \forall i \geq 0$.

A aplicação define-se por: $G(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \mod 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$

Ou de outra forma: $G(x) = \frac{1}{x} - a_0 = x_0$, em que $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ e $x_0 = [a_1, a_2, \ldots]$.

Esta aplicação tem com representação[4] gráfica:



Estamos apenas a considerar a parte decimal de $\frac{1}{x}$.

Por exemplo $G(0,32) = \frac{1}{0,32} \mod 1 = 3{,}125 \mod 1 = 0{,}125 \mod 1$

Qual a relação entre esta aplicação e uma fracção contínua? Pois bem, as partes inteiras que são "deixada de lado" pela repetição da aplicação no valor anterior constituem a sucessão de quocientes parciais que definem a fracção.

Note-se que $0,32 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8}}$ e que $\frac{1}{0,32} = 3{,}125$ logo, $G(0,32) = 0{,}125$ e agora $\frac{1}{0{,}125} = 8$ o que resulta $G(0{,}125) = 0$ terminando o processo.

[4] Esta representação foi construída recorrendo ao software GeoGebra.

Ou seja, considerando a aplicação de Gauss o algoritmo descrito inicialmente fica:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \text{ parte decimal de } \frac{1}{\alpha_k} = G(\alpha_k) \\ a_{k+1} &= \text{ parte inteira de } \frac{1}{\alpha_k},\ k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

, observa-se assim que a fracção contínua resulta da aplicação sucessiva da iteração da aplicação de Gauss.

Usar-se-á esta relação para verificar que na realidade a aplicação de Gauss exemplifica de forma simples o que caracteriza um sistema caótico dinâmico discreto.

Uma breve nota: esta aplicação não é contínua contudo, embora a maioria dos teoremas sobre aplicações dinâmicas discretas assumam continuidade, isso neste caso não constitui um problema uma vez que o que se pretende é esclarecer e exemplificar um comportamento caótico e estes teoremas não serão necessários para o nosso objectivo.

Acrescenta-se ainda que esta aplicação evidencia propriedades amplamente estudadas na teoria dos sistemas caóticos, por exemplo reconhece-se aqui a noção de aplicação de "deslocamento" (shift map) apresentada por Robert Devaney (1985). De facto, se considerarmos um número $\alpha_0 \in \left]0,1\right[$ e a sua representação em fracção contínua $\alpha_0 = [a_1, a_2, a_3, ...]$ vemos que $G(\alpha_0) = \alpha_1 = [a_2, a_3, a_4, \ldots]$ e por indução, $G(\alpha_k) = \alpha_{k+1} = [a_{k+2}, a_{k+3}, a_{k+4}, \ldots]$ o que traduz o deslocamento de uma posição na órbita de um ponto.

Corless (1992) apresenta uma analogia interessante. Considere-se uma circunferência com origem num ponto O e um ponto inicial como um berlinde sem dimensão, a aplicação de Gauss leva o berlinde da sua posição inicial para a próxima posição no sentido dos ponteiros do relógio passando pelo menos uma vez pela origem. Os naturais a_i indicam o número de vezes que o berlinde passa pela origem na sua *i-ésima* iteração, e os α_i transformados para $\alpha_i \times 2\pi$ correspondem às coordenadas angulares, em relação à origem fixada, do berlinde na circunferência quando atinge o repouso. Se o berlinde parar depois da origem com um pequeno α_i (significa que $\frac{1}{\alpha_i}$ será grande e assim a_{i+1} grande) então na próxima iteração irá passar várias vezes pela origem, caso esteja muito perto de *1* (significa que $\frac{1}{\alpha_i}$ próximo de 1 e assim $a_{i+1} = 1$) então o berlinde está perto da origem e na próxima iteração apenas passa uma vez pela origem. Pode-se pensar no berlinde sendo empurrado ao longo da circunferência com uma força inversa da distância à origem medida no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

A terminologia usada na teoria dos sistemas dinâmicos pode ser por vezes complexa, no entanto a necessária para este pequeno estudo é bastante intuitiva e relativamente simples.

Um sistema discreto dinâmico é uma relação de recorrência $x_{k+1} = G(x_k)$ com o k a desempenhar o papel de um tempo discreto. À sequência $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ designamos por órbita do ponto inicial x_0 pela aplicação $x \to G(x)$. Quaisquer pontos que satisfaçam $x = G(x)$ designam-se por pontos fixos da aplicação e, mais geralmente, se $x = G^n(x)$, onde $G^n(x) = G(G^{n-1}(x))$, então diz-se que o ponto x é um ponto periódico da aplicação, com período N o menor dos inteiros n tais que $x = G^n(x)$. Designa-se por Atractor um conjunto de pontos que atraem órbitas de um conjunto de pontos de medida não nula. Finalmente, uma aplicação diz-se sensível a condições iniciais (SCI) se pontos iniciais próximos apresentam órbitas que se separam a um taxa exponencial, ou seja, pontos que apresentam órbitas que inicialmente estão arbitrariamente próximas mas com o decorrer do *tempo* se afastam rapidamente (as definições rigorosas serão apresentadas mais tarde).
Galois provou em 1828 um teorema que afirma que um número real α se escreve como uma fracção contínua puramente periódica, incluindo o primeiro inteiro, sse α é uma *raiz quadrática irracional reduzida*, o que significa que $\alpha > 1$ é uma raiz de um polinómio do segundo grau com coeficientes inteiros e, além do mais, o seu conjugado algébrico (a outra raiz do polinómio) pertence ao intervalo $]-1,0[$

Teorema: (Galois)
Uma fracção contínua é puramente periódica sse representa um irracional quadrático reduzido.

Dem.

Seja $x > 1$, $x = \left[\overline{a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}}\right]$, diz-se uma fracção continua puramente periódica e, como já visto, a sua periodicidade garante que é um irracional quadrático ou seja, verifica uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros.

Vejamos que o seu conjugado algébrico α verifica: $-1 < \alpha < 0$.

Da periodicidade de x ($x = \left[a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x\right]$) temos que:

$$x = \frac{p_{k-1}x + p_{k-2}}{q_{k-1}x + q_{k-2}} \Leftrightarrow q_{k-2}x^2 + \left(q_{k-2} - p_{k-1}\right)x - p_{k-2} = 0$$

Se considerarmos a função $f(x) = q_{k-1}x^2 + \left(q_{k-2} - p_{k-1}\right)x - p_{k-2}$, temos que é contínua em $\mathbb{R}$, e em particular no intervalo $\left[-1, 0\right]$. Estamos em condições de aplicar o Teorema de Bolzano: $f(0) = -p_{k-2} < 0$ e $f(-1) = q_{k-1} - q_{k-2} + p_{k-1} - p_{k-2}$

Ora $q_{k-1} - q_{k-2} + p_{k-1} - p_{k-2} = \left(q_{k-1} + p_{k-1}\right) - \left(q_{k-2} + p_{k-2}\right) > 0$, pois para $k \geq 2$ sabemos que $\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} p_1 = a_1 a_0 + 1 \\ q_1 = a_1 \end{cases}$ e, por indução já foi provado que $\begin{cases} p_k = p_{k-1}a_k + p_{k-2} \\ q_k = q_{k-1}a_k + p_{k-2} \end{cases}$, sendo inteiros positivos

logo como $\begin{cases} p_{k-1} = p_{k-2}a_{k-1} + p_{k-3} \\ q_{k-1} = q_{k-2}a_{k-1} + p_{k-3} \end{cases}$, segue que $p_{k-1} > p_{k-2}$ e $q_{k-1} > q_{k-2}$.

Concluí-se desta forma que a outra raiz da equação pertence ao intervalo $\left]-1, 0\right[$.

Antes de se provar a segunda implicação, uma breve nota.

Considerando α um irracional quadrático e α' o seu conjugado algébrico, necessariamente $\alpha + \alpha' \in \mathbb{Q}$ e $\alpha\alpha' \in \mathbb{Q}$. Da mesma forma, se α e α' são irracionais tais que $\alpha + \alpha' \in \mathbb{Q}$ e $\alpha\alpha' \in \mathbb{Q}$, então são soluções da equação $x^2 - \left(\alpha + \alpha'\right)x + \alpha\alpha' = 0$ e não podem ser de uma do tipo $ax + b = c,\ a, b, c \in \mathbb{Z},\ a \neq 0$ pois assim $\alpha = \dfrac{c - b}{a}$ e seria racional.

Basta então verificar se dados $\alpha,\ \alpha' \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ temos as relações $\alpha+\alpha' \in \mathbb{Q}$ e $\alpha\alpha' \in \mathbb{Q}$ para concluir se estes números são conjugados algébricos um do outro.

Este facto é importante porque permite afirmar que o conjugado de $a+\dfrac{b}{\alpha},\ a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}$ é $a+\dfrac{b}{\alpha'},\ a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}$, com $\alpha,\ \alpha' \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ conjugados algébricos.

Vejamos que assim é:

$$a+\frac{b}{\alpha}+a+\frac{b}{\alpha'}=2a+\frac{\alpha' b+\alpha b}{\alpha\alpha'}=2a+\frac{b(\alpha+\alpha')}{\alpha\alpha'}\in\mathbb{Q}$$

$$\left(a+\frac{b}{\alpha}\right)\left(a+\frac{b}{\alpha'}\right)=a^2+\frac{ab}{\alpha}+\frac{ab}{\alpha'}+\frac{b^2}{\alpha\alpha'}=a^2+\frac{b^2+ab(\alpha+\alpha')}{\alpha\alpha'}\in\mathbb{Q}$$

Segunda implicação:

Suponhamos agora x um irracional quadrático reduzido.

Então $x>1$ e o seu complemento algébrico x' pertence a $]-1,0[$.

Seja $x=\left[a_0;a_1,a_2,...,a_k,\overline{a_{k+1},a_{k+2},...,a_{k+m}}\right]$, com $a_0 \geq 1$, neste caso $a_0 \geq 1$ pois $x>1$.

Considere-se $a_0=[x]$ (parte inteira de x) e para $n\geq 0,\ x_n=[a_n;a_{n+1},...]$, conclui-se que $x_n>[x_n]=a_n\geq 1$.

Por outro lado, como $x_n=a_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}$, vem pela nota anterior que o seu conjugado algébrico é $x'_n=a_n+\dfrac{1}{x'_{n+1}}$, para cada $n\in\mathbb{N}_0$ e, desde logo, que $x'_n>-1$ e $x'_0=x'<0$.

Verifique-se por indução que $\forall n\in\mathbb{N}_0,\ -1<x'_n<0$.

$n=0,\ -1<x'_0<0$

Hipótese: para um certo $n\in\mathbb{N}_0:-1<x'_n<0$

Tese: $-1<x'_{n+1}<0$

Temos que $-1 < x'_n < 0 \Leftrightarrow -1 < a_n + \frac{1}{x'_{n+1}} < 0 \Leftrightarrow -1 - a_n < \frac{1}{x'_{n+1}} < -a_n$, mas como $a_n \geq 1$ conclui-se que $-1 < -\frac{1}{a_n} < x'_{n+1} < -\frac{1}{1+a_n} < 0$, ou seja, $-1 < x'_{n+1} < 0$.

Finalmente, observando que $-1 < x'_n < 0 \Leftrightarrow -1 < a_n + \frac{1}{x'_{n+1}} < 0$ constata-se que

$$-1 - \frac{1}{x'_{n+1}} < a_n < -\frac{1}{x'_{n+1}}, \text{ isto é } a_n = \left[-\frac{1}{x'_{n+1}} \right].$$

Como x_n é irracional quadrático terão de existir $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ que verificam $x_m = x_n$ e portanto $\frac{1}{x'_n} = \frac{1}{x'_m}$ ($x'_m = x'_n$, porque são os conjugados de dois irracionais quadráticos iguais).

O que implica que $a_{n-1} = \left[-\frac{1}{x'_n} \right] = \left[-\frac{1}{x'_m} \right] = a_{m-1}$ e portanto, $x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n} = a_{m-1} + \frac{1}{x_m} = x_{m-1}$, pelo mesmo argumento agora para $x_{n-1} = x_{m-1}$ e assim sucessivamente, chega-se à conclusão que $a_{n-m} = \left[-\frac{1}{x'_{n-m+1}} \right] = \left[-\frac{1}{x'_{m-m+1}} \right] = a_{m-m} = a_0$, pois $m < n$, o que quer dizer que $x_{n-m} = x_0 = x$.

Logo x é uma fracção contínua puramente periódica.

O número de ouro, enquanto raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$, é um exemplo de uma irracionalidade quadrática reduzida. De facto, se dividirmos ambos os membros da equação por x, o que é possível já que $x \neq 0$, ficamos com $x = 1 + \frac{1}{x}$ ou seja $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = x = [1;1,1,1,1,\ldots]$.

Segue-se um resultado importante para a nossa análise.

Corolário: Os pontos periódicos da aplicação de Gauss são inversos das raízes quadráticas irracionais reduzidas.

Dem:

Considere-se $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$, um ponto periódico de período n da aplicação de Gauss. Desta forma temos que $\alpha = G^n(\alpha)$, mas pela propriedade de deslocamento temos que $G^n(\alpha) = \alpha_{n-1} = [a_n, a_{n+1}, \ldots]$ e assim sucessivamente, logo $[a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots] = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$, ou seja $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots]$mas então $\frac{1}{\alpha} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots]$, que é uma raiz quadrática reduzida.

A recíproca é trivial, pela definição de ponto periódico.

Do exposto anteriormente se ϕ é o número de ouro, $\frac{1}{\phi}$ é um ponto periódico da aplicação de Gauss, neste caso um ponto de período um, mais especificamente um ponto fixo da aplicação.

Com estas noções, estamos em condições de verificar que esta aplicação traduz de uma forma exemplar a propriedade dos sistemas caóticos: a divergência.

O teorema já enunciado e demonstrado de Euler-Lagrange permite formular um corolário que será determinante para podermos provar e exemplificar a dinâmica caótica da aplicação de Gauss.

Corolário: A Aplicação de Gauss é *Sensível a Condições Iniciais* (SCI).

Sendo E um espaço topológico e $f : E \to E$ uma aplicação, diz-se que um sistema dinâmico f é SCI, se $\exists \delta > 0$ tal que, para $\forall x \in E$ e $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists y \in V_\varepsilon(x)$ e $\exists n \geq 0 : \left| f^n(x) - f^n(y) \right| > \delta$. (Devaney, 1989)

No fundo, partindo de dois pontos arbitrariamente próximos, as suas órbitas pela aplicação afastam-se numa determinada iteração.

Demonstração do corolário:

Qualquer número racional tem como representação uma fracção contínua finita, desta forma um número racional apresenta um órbita que é atraída para o ponto fixo zero na aplicação de Gauss:

Seja β um racional menor que 1 (se for maior basta tomar $\frac{1}{\beta}$), então $\beta = [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}]$ ou seja $\beta = [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, 0, 0, 0, \ldots]$, e $G(\beta) = \beta_0 = [b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, 0, 0, 0, \ldots]$, assim $G^n(\beta) = \beta_{n-1} = [0, 0, 0, \ldots] = 0$.

Por outro lado, um irracional quadrático apresenta nesta aplicação uma órbita que será inevitavelmente periódica, pois tem como representação uma fracção contínua periódica.

Os números racionais e irracionais quadráticos são densos no intervalo , podemos supor um qualquer intervalo *I* com amplitude ε, e usando o princípio do “pombal” escolher um racional e um irracional neste intervalo.

Seja $\frac{p}{n}$, onde n é o menor natural maior que $\frac{1}{\varepsilon}\left(n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon\right)$ e deste modo se dividirmos o intervalo em n partes e se $p < n$, pelo princípio anterior obrigatoriamente existe p tal que $\frac{p}{n} \in I$, seja $\frac{p}{n} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.
Considere-se agora um irracional quadrático neste intervalo:
Para N suficientemente grande podemos garantir que estamos muito próximos de $\frac{p}{n}$ tomando como $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, N, 1, 1, 1, 1, \ldots]$ esse irracional.
Neste caso a sua órbita pela aplicação aproxima-se da órbita de $[1;1,1,1,1,\ldots]$ que é ϕ (a razão de ouro), ou seja aproxima-se do ponto fixo $\frac{1}{\phi} = [1;1,1,1,1,\ldots]$, $G\left(\frac{1}{\phi}\right) = [1,1,1,1,\ldots]$, ponto de período 1.
Demonstrou-se que tomando dois pontos arbitrariamente próximos as suas órbitas pela aplicação separam-se, neste caso ao fim de n iterações; uma tende para o ponto fixo 0 a outra para o ponto fixo $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0{,}618$.
Este comportamento é o que caracteriza sistemas sensíveis a condições iniciais, de facto é o tipo de comportamento associado a sistemas caóticos dinâmicos.

Tarefas para o 3º Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário

7º Ano – Representação de números em fracção contínua

No 2º ciclo os alunos tomam contacto com um novo tipo de número: os números racionais, em particular, os números fraccionários.
Contudo, no 7º ano não é frequente o uso de fracções, o que pode originar algum esquecimento das suas propriedades e regras operatórias, com claros prejuízos para os anos subsequentes. É neste sentido que se julga apropriado que ao longo do ano lectivo se proceda à aplicação de actividades como as que são propostas. Por um lado permite recordar e praticar a manipulação de fracções e números fraccionários, por outro, aborda um tema em que os alunos revelam algumas dificuldades: o erro de uma aproximação.
É também possível referir o algoritmo de Euclides (tópico facultativo) para o cálculo do máximo divisor comum entre dois números e assim apresentar outra forma de escrever números fraccionários, sempre de uma forma muito simples e semi-imediata.
Sem aprofundar a teoria das fracções contínuas e apenas esquematizando o algoritmo para o cálculo das suas reduzidas, pretende-se que o aluno se aperceba que se podem usar fracções com valores mais simples, mas que ainda assim conduzem a aproximações bastante aceitáveis da fracção inicial.
Como motivação apresenta-se uma brevíssima descrição do trabalho de Christian Huygens sobre a construção de um Planetário Mecânico, uma vez que é neste ano escolar que os alunos estudam os conceitos relacionados com a Astronomia na disciplina de Ciências Físico-Químicas.

Fracções Contínuas

O que são? Para que servem? Como se determinam?

Em 1682, o astrónomo holandês Christiaan Huygens construiu um Planetário Mecânico, um engenho mecânico que conseguia reproduzir os movimentos dos planetas então conhecidos em torno do Sol (figura 1, parte de trás do planetário onde se podem ver as rodas dentadas).

Figura 1

Para isso, desenvolveu um intrincado sistema de rodas dentadas que se interligavam entre si permitindo que cada planeta girasse em torno do Sol conforme o período da sua órbita. Christiaan, depois de algum tempo de estudo, concluiu que a razão entre os períodos da Terra e de Saturno era de $\frac{77708431}{2640858}$, mas construir discos com esta quantidade de dentes era tarefa quase impossível. Christiaan usou uma fracção com numerador e denominador mais pequenos para aproximar a primeira e poder assim construir rodas com menos dentes mas continuando a ter uma boa aproximação.

Como terá o famoso astrónomo conseguido esta aproximação? Que resultados matemáticos terá ele usado? Será que demorou muito tempo a efectuar os cálculos necessários?

Para podermos responder a estas questões temos primeiro de perceber o que são fracções contínuas...

Tarefa 1

Escrever um número numa fracção contínua

Uma Fracção Contínua é uma expressão do tipo $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ddots}}}$.

Qualquer número pode ser escrito nesta forma, em particular os números fraccionários.

Por exemplo:

$$\frac{10}{7}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}} \qquad \text{e} \qquad \frac{125}{37}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}$$

Vamos verificar:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}=1+\frac{3}{7}=\frac{10}{7}$$

Agora tu, completa os espaços em branco.

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{....}{....}}}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{5}}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{....}{....}}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{9}}}=$$

$$=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{....}{....}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{14}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{....}{....}}=3+\frac{14}{37}=\frac{....}{....}$$

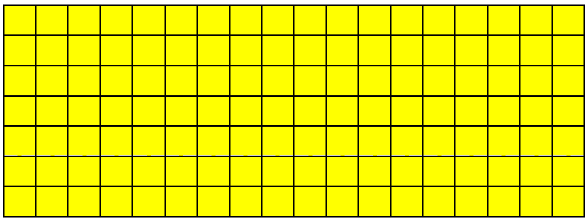
Então como fazemos? Como encontrar a fracção contínua de um número fraccionário maior que um?

Vamos usar dois métodos, um geométrico e outro analítico.

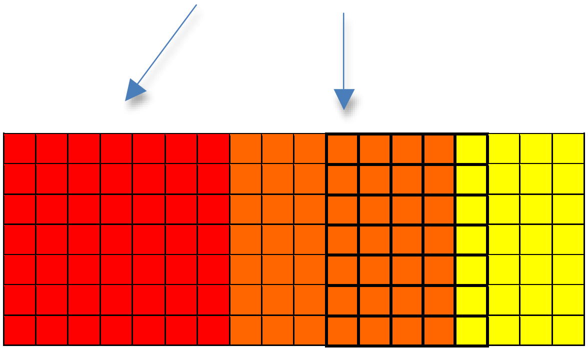
Comecemos pelo método geométrico:

Quantos quadrados de lado máximo cabem num rectângulo?

Quando escrevemos $\frac{18}{7}$ associamos logo a um número ou uma razão entre duas grandezas mas, e se pensarmos num rectângulo de comprimento 18 e largura 7?

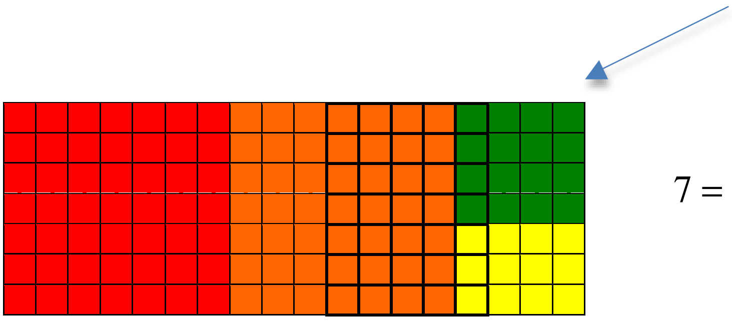


Vemos que podemos desenhar dois quadrados com lado máximo 7.



$$18 = 2 \times 7 + 4$$

Sobra um rectângulo que tem comprimento 7 e largura 4, ou seja corresponde à fracção $\frac{7}{4}$. Quantos quadrados de lado máximo podemos desenhar neste rectângulo?

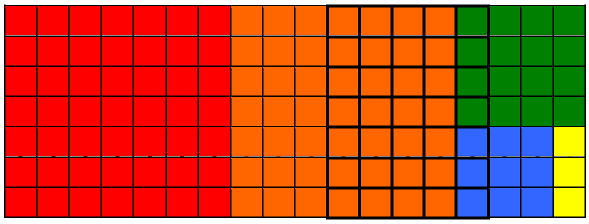


$$7 = 1 \times 4 + 3$$

Como vemos apenas podemos desenhar um quadrado de lado máximo igual a 4.

Sobra novamente um rectângulo com comprimento 4 e largura 3 que corresponde à fracção $\frac{4}{3}$.

Agora quantos quadrados de lado máximo podemos considerar neste rectângulo?

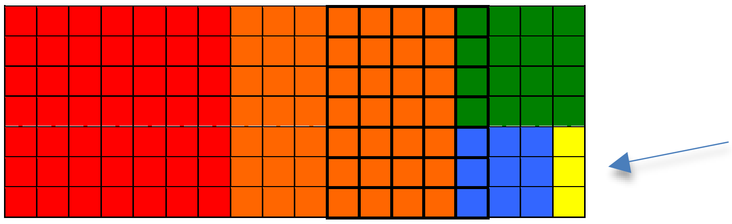


$$4 = 1 \times 3 + 1$$

Mais uma vez, apenas um.

Resta-nos um rectângulo 3×1, ou seja, podemos identificá-lo com a fracção $\frac{3}{1}$.

Quantos quadrados de lado máximo podemos agora considerar? 3 claro.



A nossa fracção $\frac{18}{7}$ vai corresponder à fracção contínua $2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$

O número de quadrados de lado máximo que podemos encontrar formam a fracção correspondente à fracção inicial.

Agora tu. Considera as fracções seguintes e escreve a fracção contínua correspondente a cada uma:

a) $\frac{11}{5}$ b) $\frac{18}{4}$ c) $\frac{20}{12}$

Outra forma de encontrar a fracção contínua correspondente a um número fraccionário maior que um:

Qual a parte inteira de uma fracção maior que um?

Vamos considerar a fracção do exemplo anterior $\frac{18}{7}$.

Qual a parte inteira de $\frac{18}{7}$?

Basta escrever a fracção no seu número misto correspondente $\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$:

Então a parte inteira da fracção $\frac{18}{7}$ é *2.*

$\frac{4}{7}$ não é um número inteiro maior que um, mas o seu inverso $\frac{1}{\frac{4}{7}}=\frac{7}{4}$ é, e assim podemo-nos perguntar outra vez:

Qual a parte inteira de $\frac{7}{4}$? Fácil, $\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$, ou seja, a parte inteira é 1.

Antes de continuarmos, repara que $\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$ e $\frac{4}{7}=\frac{1}{\frac{7}{4}}$,

tal como num puzzle, onde está $\frac{4}{7}$ escrevemos $\frac{1}{\frac{7}{4}}$ e ficamos com $\frac{18}{7}=2\frac{1}{\frac{7}{4}}$ que é o mesmo que $\frac{18}{7}=2+\frac{1}{\frac{7}{4}}=2+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}$ (porquê?)

Já começámos a escrever a nossa fracção inicial em fracção contínua. Acabamos apenas quando a fracção que sobrar tiver denominador 1.

Ficámos então, com $\frac{3}{4}=\frac{1}{\frac{4}{3}}$, qual a parte inteira de $\frac{4}{3}$? Pois, é 1: $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

E agora, $\frac{1}{3}=\frac{1}{\frac{3}{1}}$. Qual a parte inteira de $\frac{3}{1}$?

É isso, 3 e não nos sobra nada, acabou a pesquisa. Vamos então escrever a fracção contínua completa.

Completamos onde ficámos: $\frac{18}{7} = 2 + \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$

Isto é,

$$\frac{18}{7} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

Considerando novamente as fracções do exercício anterior, escreve a fracção contínua correspondente a cada uma, usando agora este método:

a) $\frac{11}{5}$ b) $\frac{18}{4}$ c) $\frac{20}{12}$

Tema Facultativo

Há outras formas de escrever a fracção contínua correspondente a um número racional, estas são as mais simples mas, há sempre um mas, se os números da fracção forem muito elevados estes métodos já não são tão práticos. Vamos usar um método conhecido há mais de 2500 anos: o método de Euclides para calcular o máximo divisor comum entre dois números.

Temos o número $\frac{125}{37}$, vamos calcular o $mdc(125,37)=1$ por este método:

aplicamos o algoritmo da divisão inteira
$125 \div 37 = 3 \times 37 + 14$
agora dividimos o divisor anterior pelo resto da divisão
$37 \div 14 = 2 \times 14 + 9$
repetimos o processo
$14 \div 9 = 1 \times 9 + 5$
novamente dividimos o divisor pelo resto
$9 \div 5 = 1 \times 5 + 4$
continuamos até obter resto zero
$5 \div 4 = 1 \times 4 + 1$
uma vez mais
$4 \div 1 = 4 \times 1 + 0$
terminou!

O $mdc(125,37)=1$, é o último resto diferente de zero.

Os quocientes que fomos obtendo nas sucessivas divisões formam a fracção contínua, repara e compara:

$$\frac{125}{37} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}$$

Já vimos anteriormente que esta igualdade é verdadeira. Vamos experimentar um pouco mais.
Escreve a fracção contínua correspondente aos números:

a) $\frac{17}{13}$ b) $\frac{37}{16}$ c) $\frac{74}{32}$

Tarefa 2

Da fracção contínua para o número fraccionário

Passar de um número para a sua fracção contínua parece mais fácil que passar da fracção contínua para o número. Puro engano!

Construindo uma tabela e repetindo o cálculo é muito fácil encontrar o número fraccionário correspondente a uma dada fracção contínua.

Antes de mais, devemos ter em atenção que um número fraccionário é da forma $\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, pelo que vamos calcular separadamente p e q e depois é só escrever a fracção.

A tabela terá o seguinte aspecto:

Se construirmos uma tabela é possível formar várias fracções até chegarmos à nossa fracção inicial.

Repara na tabela para o número $\frac{13}{5}$:

Na primeira linha colocamos cada um dos valores que aparecem na fracção contínua.

	2	1	1	2
p	2	3	5	**13**
q	1	1	2	**5**

O valor da 2ª linha é igual ao da 1ª, para a 3ª linha o valor é sempre **1**.

Nesta coluna o valor na 2ª linha é o resultado *da adição de **1** com o produto da 1ª linha pela 2ª linha da coluna anterior.* Para a 3ª linha o valor é igual ao da 1ª.

Para a terceira e restantes colunas procede-se da seguinte forma:
Multiplicar o valor da 1ª linha pelo valor da 2ª linha da coluna anterior e adicionar o valor da 2ª linha da coluna anterior a esta última.

Confuso? Vejamos:

Como determinar o número fraccionário correspondente à fracção contínua

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8}}\ ?$$

Observa:

	2	3	8
p	2	$2\times 3+1=7$	$8\times 7+2=58$
q	1	3	$8\times 3+1=25$

Então o número que procuramos é $\frac{58}{25}$.

Vamos praticar um pouco. Preenche as tabelas a seguir e determina o número correspondente a cada uma das fracções contínuas:

a) $1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}}$

	1	3	2	5
p	1	$3\times 1+1=4$	$2\times 4+1=9$	
q	1	3		

b) $1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}$

Desafio:

Compara cada fracção que determinaste na tabela com a fracção final.
O que concluis quanto à sua diferença em valor absoluto?

Tenta agora responder às questões:

- Como verifico se duas fracções estão próximas uma da outra?
- O que significa uma fracção estar próxima de outra?
- Como identifico o erro de uma aproximação?

Mas para quê isto tudo? Não se poderia usar naturalmente a fracção inicial?
Bem, se Christiaan Huygnes pensasse assim nunca teria construído o seu planetário e assim permitir que as pessoas percebessem o movimento dos planetas, recorda, construir uma roda dentada com 77708431 dentes???

O que Christiaan fez foi usar uma das fracções que aparecem na tabela correspondente à fracção contínua do número, não era bem o valor exacto, mas a sua aproximação era muito boa e fácil de encontrar.

A fracção que Christiaan usou foi a da quarta coluna, fácil de utilizar para construir as rodas dentadas e suficientemente próxima da fracção inicial para simular o movimento relativo destes planetas.

Desafio:

Será que consegues determinar a fracção que Christiaan utilizou?

8º Ano – Resolução de equações literais com duas incógnitas

No 8º ano, os alunos tomam contacto com um tipo de equação diferente do que estão habituados. Equações com duas incógnitas, designadas por equações literais com duas incógnitas, que obrigam a uma nova abordagem ao conceito de resolução de uma equação e suas soluções.

Ao longo do seu percurso escolar em diversos momentos os alunos são incentivados a procurar pares de valores que verifiquem uma ou mais condições. O problema clássico do João que comprou lápis e canetas, com lápis e canetas a um custo unitário diferente, tendo gasto um valor total, pretendendo-se a quantidade de cada material adquirido, é aplicado sob diversas formas para estimular a procura de estratégias de resolução de uma situação, bem como na pesquisa de uma solução por tentativas. Os alunos aparentam não ter consciência do conceito matemático subjacente e, na sua maioria, a estratégia de resolução seguida não obedece, pelo menos de forma inicial, a uma análise prévia dos valores em causa.

Não obstante, a abordagem comum às equações literais de primeira ordem com duas incógnitas resume-se à procura de soluções por resolução da equação em ordem a uma das variáveis e depois por concretização da variável independente. Ou seja, numa primeira fase há uma abordagem algébrica a que se segue a procura de uma solução por atribuição de um valor à variável independente. É nesta fase que os alunos costumam ter alguma dificuldade, muitos não percebem a escolha desse valor, por vezes sem justificação aparente, noutras, contudo, em que o problema assim o justifica.

Um método para a resolução, numa primeira fase, de equações deste tipo em que apenas se consideram soluções inteiras, seguindo uma metodologia que permite encontrar soluções sem necessidade de atribuição de um valor a uma das incógnitas, pode ser uma preciosa ajuda para os alunos compreenderem que a existência de soluções numa equação não obriga a que se encontre solução para a situação que a originou. Ao mesmo tempo, apercebem-se que podem existir inúmeras soluções para a mesma equação e que se deve atender às restantes condições para restringir as que são admissíveis. Permite ainda, reforçar que a solução é constituída por um par de valores, noção por vezes relegada para segundo plano.

Resolução de Equações Literais e Fracções Contínuas

Uma equação que apresente mais do que uma incógnita é designada por equação literal, no nosso caso vamos trabalhar com equações com duas incógnitas, normalmente identificadas por x e y, do tipo:

$$ax + by = c \text{, com } a,b,c \in \mathbb{N} \text{ e } x,y \in \mathbb{R}$$

Se apenas nos interessam soluções inteiras, ou seja, $x,y \in \mathbb{N}$, então diz-se que estamos perante Equações Diofantinas em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria (250 A.C.) que sistematizou um método para resolver estas equações.
Não foi, porém, o primeiro, há registos de um matemático Hindu, Aryabhata (476 A.C.), ter também resolvido várias destas equações por um método parecido com o que agora vamos utilizar.

STOP!!!

Primeiro temos de perceber algumas coisitas sobre umas fracções bem engraçadas...

Neste momento sabes que todos os números racionais se podem escrever como uma fracção, em particular os inteiros escrevem-se como fracções de denominador 1.
Por exemplo: $2 = \frac{2}{1}$ e $-10 = \frac{-10}{1}$

Mas não são as únicas, pois não? Novamente exemplos: $2 = \frac{6}{3}$ e $-10 = \frac{-20}{2}$

Então se até os números inteiros se podem escrever como várias fracções o que se passa com os restantes? Será possível escrever um número fraccionário como diferentes fracções?

Já sabes a resposta. É sim!! Por exemplo $\frac{3}{5} = \frac{45}{75}$ (concordas?)

E não há outra forma? Pois, claro que há, recorrendo às Fracções Contínuas.

Fracções quê??? CONTÍNUAS

Por exemplo: $\frac{12}{7} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$ (confirmas?)

Uma expressão do tipo da anterior, ou seja:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ddots}}},$$

designa-se por Fracção Contínua.

Então como se encontram as fracções contínuas de números racionais?

Muito fácil.
Dispomos de vários métodos, vamos usar um muito prático:
Este método é muito simples, consiste em retirar as unidades e inverter a fracção que "sobra", repara:

Consideremos, como exemplo, o número $\frac{23}{9}$, vamos escrever a sua fracção contínua.

- Quantas unidades há em $\frac{23}{9}$? Certo, duas (2).

Vamos retirar à fracção essas duas unidades, ficamos com $\frac{5}{9}$ (concordas?)

- Invertemos esta última fracção, ou seja, $\frac{9}{5}$
- Agora consideramos apenas esta fracção e repetimos o processo.

Quantas unidades há em $\frac{9}{5}$? Pois, uma (1).

Sobra $\frac{4}{5}$ e invertemos, $\frac{5}{4}$.

- Novamente, quantas unidades há em $\frac{5}{4}$? Outra vez, uma (1)

Sobra $\frac{1}{4}$ e invertemos, espera!!!! O inverso de $\frac{1}{4}$ é 4 (correcto?).

Pára tudo, não podemos continuar, se retiramos as unidades ao 4 ficamos com o quê?

Portanto terminámos o processo.

Repara, da primeira vez retirámos (2), da seguinte (1) depois, novamente (1) e concluímos com o 4.

Agora basta colocar na expressão $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ddots}}}$ os número inteiros pela ordem que foram determinados.

Assim a fracção contínua correspondente a $\frac{23}{9}$ é $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$.

Tudo muito simples e fácil de calcular.

Agora tu. Escreve a fracção contínua de cada número:

a) $\frac{45}{22}$ b) $\frac{125}{59}$ c) $\frac{307}{90}$

Estamos quase em condições de poder resolver as equações Diofantinas.
Só falta conhecer um pequeno pormenor.

Se construirmos uma tabela é possível formar várias fracções até chegarmos à nossa fracção inicial.

Repara na tabela correspondente à fracção $\dfrac{23}{9}$ do exemplo:

Na primeira linha colocamos cada um dos valores dos quocientes parciais.

	2	1	1	4
p	2	$2\times 1+1=3$	$3\times 1+2=5$	$5\times 4+3=\mathbf{23}$
q	1	1	$1\times 1+1=2$	$2\times 4+1=\mathbf{9}$

O valor da 2ª linha é igual ao da 1ª, para a 3ª linha o valor é sempre **1**.

Nesta coluna o valor na 2ª linha é o resultado *da adição de* ***1*** *com o produto da 1ª linha pela 2ª linha da coluna anterior.* Para a 3ª linha o valor é igual ao da 1ª.

Para a terceira e restantes colunas procede-se da seguinte forma:
Multiplicar o valor da 1ª linha pelo valor da 2ª linha da coluna anterior e adicionar o valor da 2ª linha da coluna anterior a esta última.

Vamos praticar um pouco.
Completa cada uma das tabelas correspondentes às fracções anteriores.

a)

b)

c)

Fácil, não?
Agora sim, estamos em condições de resolver algumas equações Diofantinas. Ou seja, vamos procurar soluções inteiras de equações literais com duas incógnitas.

Por exemplo, consegues encontrar uma solução para a equação: $2x+2y=4$?
Pois, esta é fácil.

Agora outra: $23x-9y=1$.
Já se torna um pouco mais complicado. É aqui que se torna útil usar as fracções contínuas. Repara nos coeficientes das incógnitas, lembram-te algo?

Exactamente! A fracção que inicialmente consideramos para escrever a sua fracção contínua.

Sendo assim, a solução é fácil. Depois de termos construído a tabela basta considerar para x **o valor da 3ª linha da penúltima coluna e para** y **o valor da 2ª linha da mesma coluna**.

Repara, para $x = 2$ e $y = 5$ temos que $23 \times 2 - 9 \times 5 = 1$. Parece magia mas não, é simplesmente a MATEMÁTICA a funcionar...
Ou seja, uma solução da equação é o par $(2,5)$.
Agora tu.
Encontra uma solução para cada uma das seguintes equações:

a) $125x - 59y = 1$

b) $491x - 154y = -1$

Depois de teres percebido o processo tenta investigar como poderíamos encontrar uma solução para cada uma das próximas equações:

a) $125x + 59y = 1$

b) $491x + 154y = -1$

c) $2500x - 1180y = 20$ (repara que 2500 e 1180 são múltiplos de 20)

d) $34370x - 10780y = 70$ (repara que 2500 e 1180 são múltiplos de 70)

9º Ano – Números racionais versus números irracionais

No 9º ano os alunos iniciam o estudo do conjunto dos números reais pelo que procedem à distinção entre números racionais e números irracionais. Esta baseia-se na comparação da representação em dízima correspondente a cada número, dízimas finitas ou infinitas periódicas para os racionais e dízimas infinitas não periódicas para os irracionais. Uma metodologia que por vezes suscita algumas dúvidas e cria confusão pela dificuldade em perceber se determinada dízima é finita ou infinita periódica ou, pelo contrario, se é infinita não periódica. Os alunos são incentivados a investigar as representações decimais de números na calculadora o que, para além de ser pouco rigoroso, promove o erro caso estas não apresentem um padrão reconhecido na capacidade limitada de dígitos da calculadora, por outro lado muitos interrogam-se como se pode afirmar que dada dízima não é periódica apenas porque não "parece ser" na calculadora. O que deveria ser rigoroso torna-se um "acto de fé".

A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ é apresentada como exemplo de um raciocínio lógico – dedutivo que explica a existência de números que não podem ser racionais, porque não podem ser escritos por uma fracção, mas não indica ao aluno um critério suficientemente claro que lhe permita realizar essa catalogação.

O domínio da escrita de um número real em fracção contínua pode facilitar uma compreensão quanto à distinção entre números reais esclarecendo a sua natureza segundo um raciocínio lógico e relativamente acessível.

Recorre-se a um algoritmo para escrever a fracção contínua de um número real e desta forma verifica-se que para certos números o processo é infinito, por oposição aos números racionais, em que é sempre finito. Nesta fase, os alunos são introduzidos ao teorema de Euler – Lagrange, sem necessidade de demonstração, bem como a um processo para deduzir a expressão geral da fracção contínua de um número da forma $\sqrt{n^2+1}$ como um exemplo simples de vários números irracionais.

Números racionais versus números irracionais

Os números reais podem ter diversas representações, muitas delas bastante diferentes. Por exemplo $\frac{1}{3}$ e $0,(3)$ representam o mesmo número racional mas o seu aspecto não podia ser mais antagónico.

Há no entanto, outras formas de escrever números reais. Vamos explorar uma pouco conhecida mas que, quando compreendida, facilita a distinção entre números racionais e números irracionais.

Então que forma é essa?

Qualquer número real pode ser escrito na forma de *Fracção Contínua*.

Fracção Contínua???

Designa-se por fracção contínua uma expressão do tipo

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ddots}}}}$$

Por exemplo: $\frac{12}{5}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$

Então como podemos, de uma forma simples (não a original), encontrar a fracção contínua de um determinado número real?

Muito fácil. Basta seguir o algoritmo seguinte:

1º Considera-se um número real x. Se $x \geq 1$ segue para o 2º, se $x < 1$ segue para o 3º.

2º Subtrair a x a sua parte inteira e seguir para o 3º.

3º Inverter o número que se obtém e voltar ao 1º.

Repete-se o processo até que a subtracção no 2º resulte em zero.

Os números inteiros que se vão obtendo ao longo do processo formam a fracção contínua correspondente.

Repara:

Vamos escrever a fracção contínua para $\frac{13}{7}$

$$\frac{13}{7}-1=\frac{6}{7}, \text{ subtraímos 1 porque é a parte inteira de } \frac{13}{7}$$
$$\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}, \text{ subtraímos porque é a parte inteira de } \frac{7}{6}$$
$$6-6=0, \text{ termina o processo.}$$

Subtraímos os números 1 (duas vezes) e o 6, então a fracção contínua que procuramos é:

$$\frac{13}{7}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}$$

Tenta tu agora.
Escreve as fracções contínuas dos números:

a) $\frac{21}{4}$ b) $\frac{35}{12}$ c) $\frac{134}{71}$

Já reparaste que todos estes números são racionais, haverá diferença para os irracionais?

Determina as fracções contínuas dos números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$.

Alguma conclusão? Alguma questão em especial? Alguma diferença aparente com os números racionais anteriores?

Desafio

Tenta encontrar uma forma de distinguir, a partir da representação em fracção contínua, se um número real é racional ou irracional, consegues?

Na realidade, o grande matemático suíço Leonard Euler provou, em 1767, que os números racionais têm fracções contínuas finitas e os irracionais não, têm fracções contínuas infinitas.

Podemos ir mais longe.

Qualquer número da forma $\sqrt{n^2+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, tem como fracção contínua

$$n+\cfrac{1}{2n+\cfrac{1}{2n+\cfrac{1}{\ddots}}}$$

Observa o raciocínio:

$\sqrt{n^2+1}$ é solução da equação do segundo grau $x^2-\left(n^2+1\right)=0$ (porquê?)

Assim, podemos escrever:

$$x^2-\left(n^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x^2-n^2-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-n^2=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-n)(x+n)=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-n=\frac{1}{x+n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=n+\frac{1}{n+x}$$

repara que x é ele próprio a expressão, "encaixando-o" sucessivamente obtemos uma repetição infinita.

Logo $$\sqrt{n^2+1}=n+\cfrac{1}{2n+\cfrac{1}{2n+\cfrac{1}{\ddots}}}$$

Agora tu.
Escreve a fracção contínua de:

a) $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{37}$

Confirma a tua resposta recorrendo ao método apresentado inicialmente.

10º Ano – Resolução de equações do 2º grau

Esta actividade pretende mostrar aos alunos, uma vez mais, que diferentes conceitos em Matemática não estão em compartimentos estanques e sem qualquer tipo de ligação. Já em diversas situações foi observado que resultados numa determinada área influem decisivamente para a compreensão e aplicação de técnicas em domínios que, à partida, seriam totalmente estranhos e alheios.

A actividade propõe um método para resolver determinados tipos de equações do segundo grau sem necessidade de recorrer ao método tradicional da aplicação da fórmula resolvente. Neste ano lectivo os alunos exploram diferentes propriedades das funções polinomiais do segundo grau, quer pela sua expressão algébrica, quer pela representação gráfica num referencial cartesiano. Acresce ainda o estudo da regra de Ruffini na decomposição de polinómios pelo que, o método em questão pode também servir para praticar este conteúdo.

A procura de uma solução por aproximações sucessivas será uma primeira abordagem ao estudo da Análise Numérica que pode despertar nos alunos o interesse sobre como e porque funcionam os métodos utilizados pelas calculadoras gráficas na pesquisa de soluções. Não raras vezes a máquina indica um valor com casas decimais quando por via algébrica o valor obtido é inteiro, motivo de admiração e desconfiança por parte dos alunos que tendem a ver a tecnologia como detentora de toda a verdade, descurando amiúde o seu sentido crítico.

As novas calculadoras permitem escrever fracções de uma forma simples e encadeada, como tal os cálculos não serão difíceis e entediantes como se poderia supor à primeira vista, além do que se apresenta um pequeno programa para a calculadora Texas TI-84 PLus que permite calcular cada fracção da sequência.

Resolução de uma equação do segundo grau por um método diferente.

O método tradicional para resolver uma equação do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a,b,c \in \mathbb{R}$$

corresponde à aplicação da conhecida "Fórmula Resolvente", de facto qualquer solução de uma equação do segundo grau pode ser determinada por aplicação deste método.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mas, será o único? Vamos ver que não.

Tomemos como exemplo a equação: $x^2 + 7x + 9 = -3$
Resolve a equação por aplicação da fórmula resolvente.

Completa: $S = \{ \qquad \}$.

Agora repara:
Ter $x^2 + 7x + 9 = -3$ é o mesmo que ter: $x(x+7) = -12$

Isto é: $x^2 + 7x + 9 = -3 \Leftrightarrow x(x+7) = -12$ (porquê?)

Mas então: $x = \frac{-12}{7+x}$, se $x \neq -7$ (pode verificar-se substituindo na equação)

Bem, nesse caso, onde está x no segundo membro posso colocar $\frac{-12}{7+x}$, e assim sucessivamente.

Vem então que: $$x = \cfrac{-12}{7 + \cfrac{-12}{7 + \cfrac{-12}{7 + \ddots}}},$$

diz-se que é uma Fracção Contínua Generalizada.

Qual o interesse disto?
Depois de várias tentativas, chegou-se à conclusão que era possível construir uma sequência infinita (uma sucessão) de números que se aproximaria de uma das soluções da equação.

Observa:

$$x = \frac{-12}{7+x},\ x = \cfrac{-12}{7 + \cfrac{-12}{7+x}},\ x = \cfrac{-12}{7 + \cfrac{-12}{7 + \cfrac{-12}{7+x}}},\ x = \cfrac{-12}{7 + \cfrac{-12}{7 + \cfrac{-12}{7 + \cfrac{-12}{7+x}}}}, \text{ etc.}$$

As igualdades são verdadeiras porque x em cada uma é o mesmo, mas isto para nós pouco interesse prático tem. De que serve saber que são o mesmo se não fazemos ideia do seu valor? Vamos contornar este problema supondo que são diferentes, isto é:

$$x=\frac{-12}{7+\alpha},\ x=\frac{-12}{7+\frac{-12}{7+\alpha}},\ x=\frac{-12}{7+\frac{-12}{7+\frac{-12}{7+\alpha}}},\ x=\frac{-12}{7+\frac{-12}{7+\frac{-12}{7+\frac{-12}{7+\alpha}}}}$$

Agora procede do seguinte modo:
Atribui um valor a α e calcula cada uma das expressões anteriores. O que verificas?

Aumenta o número de fracções e analisa os resultados que obténs.

Recorre ao seguinte programa para a TI-84 Plus para facilitar os cálculos intermédios. (de cada vez que pressionares a tecla ENTER obténs o valor de uma fracção parcial $\frac{a}{b+c}$)

```
:Prompt A,B
:Input "C=",C
:Lbl D
:Disp "D=", A/(B+C)
:Pause
:A/(B+C)→C
:Goto D
```

O segredo reside em que quanto mais próximo da solução considerarmos α, mais rápido nos aproximamos do seu valor real.
Por exemplo, considera $\alpha=-2$ e repete os cálculos anteriores. O que concluis?

A questão que neste momento deve estar a atormentar-te o espírito é: "Como é que isto funciona?"
A resposta é simples, quantas mais fracções considerares na fracção contínua generalizada, menor a influência do valor que se considera inicialmente. Claro, quanto mais próximo estiver do valor correcto mais rápido será a sua visualização. É um pouco desta forma que a tua calculadora calcula as ordenadas ou abcissas de pontos de um gráfico, diz-se que usa métodos de aproximação.
O método apresenta algumas desvantagens, é moroso e apenas permite encontrar uma das soluções. Mas tu sabes como encontrar a outra, se existir, certo?

Vamos experimentar.

Resolve as seguintes equações pelo método das fracções contínuas generalizadas:

a) $x^2-x-6=0$

b) $x^2-5x+10=4$

c) $2x^2+5x-3=0$ (esta é um pouco diferente, mas com um pequeno ajuste tudo de resolve...)

11º Ano – Sucessões de números racionais

No 11º ano os alunos abordam os conceitos de sucessão, convergência, limite, sucessão limitada e progressão, entre outros. É portanto possível trabalhar alguns destes conceitos enquadrados na teoria das fracções contínuas. Julga-se uma excelente oportunidade para mostrar as potencialidades do estudo das sucessões na apresentação e justificação de resultados, assim como, exemplificar a construção de outro tipo de sucessões que obedecem a critérios mais gerais e menos rígidos daqueles que os alunos estudam no âmbito do programa da disciplina.

Não se fará uma prova completa e rigorosa da convergência das fracções reduzidas mas, através da sua representação gráfica, é possível apontar linhas de orientação para o seu comportamento e eventuais consequências quanto à representação de números reais por fracções contínuas.

Para uma melhor percepção das relações que se pretendem estabelecer, analisa-se em primeiro lugar uma fracção contínua finita. Na construção de uma fracção contínua recorre-se ao algoritmo já apresentado aquando da exploração por alunos do 9º ano. Para agilizar e facilitar a determinação das várias reduzidas pode-se recorrer a um pequeno programa para a calculadora Texas TI-84 Plus, uma das mais usadas pelos alunos no ensino secundário, que se apresenta em anexo à actividade.

De qualquer forma, os alunos devem ser incentivados a percorrer todos os passos do algoritmo antes de confirmarem na calculadora, é importante que compreendam o processo e o possam adaptar a diferentes situações, desde logo inferir quanto à sua finitude.

Sucessões e Fracções Contínuas

Os números podem ter diferentes representações, uma delas é pouco conhecida mas muito interessante.

Essa representação designa-se por Fracção Contínua.

Sabe-se que qualquer número real pode ser representado por uma fracção contínua, isto é, da forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}\text{, onde } a_0 \in \mathbb{Z} \text{ e } a_i \in \mathbb{N},\ \forall i > 0$$

Para encontrar a fracção contínua de um número, basta seguir o algoritmo seguinte:

1 – Considera-se um número real x. Se $x \geq 1$ segue para *2*, se $x < 1$ segue para *3*.

2 – Subtrair a x a sua parte inteira e seguir para *3*.

3 – Inverter o número que se obtém e voltar a *1*.

Repete-se o processo até que a subtracção em *2* seja zero.

Os números inteiros que se vão obtendo ao longo do processo formam a fracção contínua correspondente.

Repara, vamos escrever a fracção contínua para $\frac{13}{7}$

$$\frac{13}{7} - 1 = \frac{6}{7}, \text{ subtraímos 1 porque é a parte inteira de } \frac{13}{7}$$

$$\frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}, \text{ subtraímos 1 porque é a parte inteira de } \frac{7}{6}$$

$$6 - 6 = 0, \text{ termina o processo.}$$

Subtraímos os números 1 (duas vezes) e 6, então a fracção contínua que procuramos é:

$$\frac{13}{7} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}$$

Confirma que realmente esta igualdade se verifica.

Tenta tu agora.

Escreve as fracções contínuas dos números:

a) $\frac{35}{12}$ b) $\sqrt{2}$ c) π

Muito provavelmente percebeste que há diferenças entre o primeiro número e os dois seguintes.

Como ter a certeza, ou pelo menos explicar por um raciocínio lógico, que efectivamente aquelas fracções representam os respectivos números?

Vamos usar os teus conhecimentos sobre sucessões.

Primeiro construímos uma tabela da seguinte forma:

	a_0	a_1	a_2	...	a_n
p_n	a_0	$a_1 a_0 + 1$	$p_1 a_2 + p_0$	...	$p_{n-1} a_n + p_{n-2}$
q_n	1	a_1	$q_1 a_2 + q_0$	...	$q_{n-1} a_n + q_{n-2}$

Cada um dos $\frac{p_n}{q_n}$ corresponde a um número fraccionário cuja fracção contínua correspondente é $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$. Estes números formam uma sucessão finita se a fracção contínua for finita e uma sucessão infinita se a fracção contínua for infinita.

Constrói a tabela para o número $\frac{13}{7}$. O que concluis?

Representa agora num referencial o.m. os pontos $\left(n, \frac{p_n}{q_n}\right)$. O que verificas?

Vejamos agora para $\sqrt{2}$. Constrói a respectiva tabela para os primeiros 6 termos.

Representa os pontos $\left(n, \frac{p_n}{q_n}\right)$ que calculaste num referencial o.m.. O que observas?

Completa:

Os termos de ordem par formam uma sucessão monótona ___________.

Os termos de ordem ímpar formam uma sucessão monótona ___________.

A sucessão $\frac{p_n}{q_n}$ não é monótona, mas é ___________ e ___________.

Repete tudo o que acabaste de realizar, mas agora para o número π .

Sabendo que para qualquer fracção contínua sucede o mesmo, será que qualquer Fracção Contínua representa um único número real?

12º Ano - Sistema Discreto Sensível a Condições Iniciais

No último ano do ensino secundário os alunos aprofundam conceitos e procedimentos relativos a funções já estudadas e outras que exploram pela primeira vez como as funções exponencial e logarítmica. É frequente os alunos cometerem erros de cálculo no uso da função exponencial porque não trabalhando com os valores indicados ou errando os arredondamentos os resultados obtidos estão completamente desfasados do correcto. A explicação que por vezes recebem reside na monotonia desta função em particular e no facto de pequenos desvios poderem apresentar diferenças acentuadas. Mas qual o real significado da expressão “pequenos desvios podem originar diferenças acentuadas”?

Neste sentido e estando os alunos já bastante familiarizados com o conceito de função, é possível apresentar um exemplo de um Sistema Discreto Sensível a Condições Iniciais com base nos resultados obtidos na calculadora no desenvolvimento de um irracional quadrático. Para tal recorre-se a um pequeno programa para a calculadora Texas TI-84 Plus, uma das mais usadas pelos alunos no ensino secundário, que implementa o algoritmo na determinação dos vários quocientes da fracção contínua. Neste caso e ao contrário do tratamento aquando da exposição teórica, a função que se considera não estará definida para $x = 0$ o que não levanta problemas no presente caso prático.

Posteriormente, recorre-se ao desenvolvimento em fracção contínua do número de ouro para justificar o comportamento observado na utilização da calculadora.

Sistemas discretos dinâmicos explicados com fracções contínuas.

Qualquer número real pode ser escrito na forma de fracção contínua, mais, através da escrita em fracção contínua é possível distinguir entre números racionais e irracionais.
Qualquer número racional escreve-se como uma fracção contínua finita e qualquer número irracional escreve-se como uma fracção contínua infinita.
Uma fracção contínua é uma expressão do tipo:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \quad \text{, onde } a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N} \text{ para } i \geq 1.$$

Cada um dos a_i são designados por quocientes parciais

Para encontrar a fracção contínua de um número, basta seguir o algoritmo seguinte:

1 - Considera-se um número real x. Se $x \geq 1$ segue para *2*, se $x < 1$ segue para *3*.

2 - Subtrair a x a sua parte inteira e seguir para *3*.

3 - Inverter o número que se obtém e voltar a *1*.

Repete-se o processo até que a subtracção em *2* seja zero.

Este algoritmo terá o seguinte aspecto na calculadora TI-84 Plus

```
:Input "X=",X
:Lbl A
: Disp "A=", iPart(X)
:If X-iPart(X) > 10^-5
:Then
:1/(X-iPart(X))→X
:Pause
:Goto A
:Else
:End
```

Recorrendo ao algoritmo anterior escreve as fracções contínuas correspondentes aos números:

a) $\dfrac{125}{36}$ b) $\sqrt{2}$

Notaste alguma diferença entre as fracções relativas a cada um dos números?

Na realidade, prova-se que se o número for racional o processo termina e, se pelo contrário for irracional, o processo é infinito.

Para aceitarmos o facto de $\sqrt{2}$ ter fracção contínua infinita vamos pensar do seguinte modo.

$\sqrt{2}$ é solução da equação $x^2 - 2 = 0$ (porquê?),

mas então:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 1 \Leftrightarrow (x \neq -1, \text{ porquê?}) \\
&\Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

Vemos assim que $x = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x+1} + 1} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{x+1}}$ e assim sucessivamente de forma infinita, como $\sqrt{2} = x$, porque é solução da equação, então vemos que

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

Portanto a fracção contínua de $\sqrt{2}$ é infinita periódica de período 2.

O mesmo se passa com $\sqrt{5}$.

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}$$

, verifica esta igualdade pela equação $x^2 - 5 = 0$

Contudo, usando a calculadora, tal situação não se verifica. Ao fim de 11 iterações aparece o número 3, o que contraria esta afirmação. Qual a razão desta disparidade? A limitação da calculadora, claro! Esta tem uma capacidade limitada para representar números e portanto precisa de usar arredondamentos, ao fim de alguns cálculos esses arredondamentos começam a ser significativos e “desviam-nos” do valor correcto.

O algoritmo na calculadora torna-se, por este motivo, um exemplo de um Sistema Discreto Sensível a Condições Iniciais (SCI). O célebre efeito borboleta.

Repara, se considerarmos dois valores extremamente próximos seria expectável que as suas representações em fracções contínuas fossem muito semelhantes, será?

Escreve as fracções contínuas de $\sqrt{5}$ e 2,236068 (estes valores estão bastante próximos, qual a diferença entre os dois?)

Como se vê, depois de algumas iterações os valores obtidos para as fracções contínuas são bastante diferentes.

É esta situação que caracteriza um SCI, se partirmos de dois pontos muito próximos, ao fim de algumas iterações as suas trajectórias separam-se, esta ideia sugere que pequenas perturbações podem causar resultados absolutamente inesperados.

Para perceber melhor este fenómeno vamos recorrer a uma função real estudada pelo matemático alemão Carl Friedich Gauss, conhecida por Aplicação de Gauss e definida em $]0,1]$:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], \text{ onde } \left[\frac{1}{x}\right] \text{ é a parte inteira de } \frac{1}{x}.$$

Se considerarmos um valor $x_0 \in]0,1]$ e calcularmos a sua imagem obtemos um valor no intervalo $[0,1]$, se $f(x_0) \neq 0$ podemos voltar a calcular agora para $x_1 = f(x_0)$, ou seja

$x_2 = f(x_1) = f \circ f(x_0)$ e assim repetidamente. Os vários $x_1, x_2, \ldots$ formam a trajectória de x_0 pela aplicação de Gauss e, se ao fim de algumas iterações os valores se repetem, diz-se que a trajectória é periódica.

É o que ocorre se considerarmos $x_0 = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$ (usando a fracção contínua qual é a trajectória deste ponto pela aplicação?)

Claro que este valor não foi escolhido ao acaso, serve muito bem para se perceber as consequências que pequenas perturbações podem provocar num determinado sistema.

Vejamos, considere-se $x_0 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$ (um dos factos curiosos e absolutamente notáveis da Matemática é a interligação que podemos encontrar nos mais diferentes domínios, quem diria que esta fracção representa o inverso do Número de Ouro!)

Agora considere-se $x'_0 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{N+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}}}}$

Para um valor de N suficientemente grande as fracções de x_0 e x'_0 estão muito próximas, isto é, os números correspondentes estão muito próximos um do outro. Enquanto x_0 tem os quocientes parciais todos iguais, x'_0 a partir de uma certa ordem varia mas como a fracção

$\cfrac{1}{N+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$ tende para zero com o crescimento de N, podemos escolher a ordem n para qual os quocientes das duas fracções contínuas são diferentes e ao mesmo tempo garantir que os números correspondentes estão tão próximos quanto queiramos.

Posto isto, iterando a aplicação de Gauss conclui-se que:

enquanto $f\left(x_0\right)=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}-1=x_1=\cdots=f\left(x_{n-1}\right)$, (porquê?)

vemos que $f\left(x'_{n-1}\right)=N+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}-N=\sqrt{2}$. (porquê?)

Ou seja, considerando um *N* suficientemente grande é possível constatar a diferença nas trajectórias dos dois pontos que durante *n-1* iterações se mantiveram iguais mas que na *enésima* iteração se distanciam por completo: a primeira continua a valer $\frac{2}{1+\sqrt{5}}\simeq 0{,}61803399$ e a segunda passa a valer $\sqrt{2}\simeq 1{,}4142136$, recorde-se que inicialmente quase se confundiam um com o outro. Se isto ocorre com uma função tão simples imagine-se em situações mais complexas, por exemplo num sistema meteorológico, percebe-se assim a dificuldade de realizar previsões...

Conclusão

Aceitam-se todos os reparos quanto à forma e mesmo ao conteúdo escolhido para cada uma das seis fichas de trabalho aqui apresentadas. A raridade com que este assunto é tratado ao nível pré-universitário constituiu ao mesmo tempo uma dificuldade e um desafio extremamente interessante e estimulante.

Como tal, as propostas de actividades resultaram de uma reflexão sobre o que poderia ser tratado com relativa facilidade e rapidez e, ao mesmo tempo, com relevância e interesse para os conteúdos do ano lectivo em questão.

No plano teórico, houve a preocupação de não colocar de lado qualquer resultado e correspondente justificação, sempre que possível, considerado fundamental para o completo esclarecimento e fundamentação dos conceitos tratados, ao mesmo tempo que se tentou usar uma linguagem suficientemente clara e acessível visto que, embora o assunto não seja de transcendental complexidade, ainda assim pode suscitar dúvidas a quem não está familiarizado com os termos e conceitos tratados.

Entende-se que este trabalho poderia ser utilizado por professores, educadores e alunos interessados em explorar um pouco mais os conteúdos contemplados no programa da disciplina. Espera-se que este seja um ponto de partida para um estudo mais profundo e profícuo do tema em análise, e para tal, recomenda-se vivamente a consulta dos vários textos indicados na bibliografia, bem como das páginas online. Alerta-se contudo, que neste momento o desenvolvimento da teoria abarca praticamente todos os campos da Matemática existindo já artigos onde se recorre a fracções contínuas para compreender fenómenos físicos ou biológicos.

Referências Bibliográficas

Barrow, John D.: "Chaos in Numberland: The secret life of continued fractions": in Plus Magazine, Issue 11, May 2000. (http://plus.maths.org/content/)

Beskin, N.M.: "Fracções Contínuas", Editora Mir Moscovo, 1980 (Tradução de Pedro Lima, 1987)

Collins, Darren C.: "Continued Fractions", MIT Undergraduate Journal of Mathematics, nº1, Julho de 1999.

Conway, John H. e Guy, Richard K.: "O Livro dos Números", Universidade de Aveiro/Gradiva, 1999.

Corless, Robert: "Continued Fractions and Chaos": in Amer. Math. Monthly, 1992,

Devaney, Robert L.: "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems", Addison-Wesley Publishing Company, 1989

Khinchin, A. Ya.: "Continued Fractions", Dover, 1997

Kline, Morris: "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times", Oxford University Press, 1972

Olds, C.D.: "Continued Fractions", Random House, 1963

Páginas WEB consultadas

http://www.math.dartmouth.edu/~euler/ (Consultado em Janeiro de 2011)

http://www.math.temple.edu/~yury/calendar/calendar.html (Consultado em Maio de 2010)

http://mathworld.wolfram.com/ContinuedFraction.html (Consultado em Maio de 2010)

http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html#orrery

(Consultado em Novembro de 2010)

http://archives.math.utk.edu/articles/atuyl/confrac/index.html (Consultado em Novembro de 2010)